Das verallgemeinerte homogene Dirichlet-Problem für Produkte linearer elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Mathematik

der

Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Bernd Schamburg

aus Bremen

Berlin 1985

Das verallgemeinerte homogene Dirichlet-Problem für Produkte linearer elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Mathematik

der

Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Bernd Schomburg

aus Bremen

Berlin 1985

Betreuer : Professor Dr. Karl Doppel

Gutachter : Professor Dr. Erhard Meister

Professor Dr. Karl Doppel

Termin der Disputation: 29. November 1985

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in der Zeit von Dezember 1982 bis Juni 1985 unter der Betreuung von Herrn Prof. Dr. K. Doppel an der Freien Universität Berlin. Für die Themenstellung und die vielfältige Unterstützung bei der Abfassung der Arbeit bin ich Herrn Prof. Dr. K. Doppel zu großem Dank verpflichtet.

Ferner gilt mein herzlicher Dank Frau E. Bräuer für die sorgfältige Reinschrift des Manuskriptes.

Zu guter Letzt danke ich der Studienstiftung des deutschen Volkes für die mir während der gesamten Studienzeit gewährte Unterstützung und Förderung.

Berlin, im Juni 1985

Bernd Schomburg

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1: Einleitung 1

Kapitel 2: Funktionenräume 4

2.1. Allgemeine Bezeichnungsweisen 4

2.2. Funktionenräume 4

2.3. Poincaré-Ungleichungen 6

Kapitel 3: Koerzitive Operatoren in Hilberträumen und analytische Halbgruppen 10

3.1. Einige Ergebnisse aus der Theorie der linearen Operatoren in Hilberträumen 10

3.2. Das Spektrum koerzitiver Operatoren in Hilberträumen 12

3.3. Tensorprodukte von Hilberträumen und von linearen Operatoren in Hilberträumen 17

3.4. Analytische Halbgruppen in Hilberträumen 24

Kapitel 4: Die Koerzitivität von Produkten elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung 27

4.1. Die Elliptizität von Produkten elliptischer Differentialoperatoren ohne Störglied 27

4.2. Produkte elliptischer Operatoren mit Störglied 34

4.3. Das verallgemeinerte homogene Dirichletproblem und das Evolutionsproblem für koerzitive Produktoperatoren 39

Kapitel 5: Regularitätsaussagen für elliptische Produktoperatoren 44

5.1. Vorbemerkungen über gleichmäßig elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung 44

5.2. Die Friedrichs-Fortsetzungen elliptischer Produktoperatoren 45

Literatur: 52

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung des homogenen Dirichletproblems für lineare Differentialoperatoren Q, die sich als Produkt zweier in beschränkten offenen Mengen $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ ($m_1, m_2 \geq 1$) definierter linearer elliptischer Differentialoperatoren P_1 bzw. P_2 darstellen lassen. Die Operatoren P_1 und P_2 seien in verallgemeinerter Divergenzform gegeben (vgl. Abschnitt 4.1.). Der Operator Q, im folgenden auch kurz als Produktoperator bezeichnet, wirke dabei auf komplexwertige Funktionen, die auf einer offenen Teilmenge G des kartesischen Produkts $G_1 \times G_2$ definiert sind.

Zum ersten Mal untersucht wurde dieses Problem für den Fall eines endlichen Produktes formal-selbstadjungierter elliptischer Differentialoperatoren von E.B. Dynkin in [9], der sich dabei stochastischer Methoden bediente. Unter Benutzung von Hilbertraummethoden haben dann K. Doppel und N. Jacob in [5], [6] das verallgemeinerte homogene Dirichletproblem und das dazugehörige Evolutionsproblem für den Fall eines endlichen Produktes von Laplace-Operatoren behandelt.

Wir folgen hier dem in Doppel/Jacob [5] eingeschlagenen Weg, indem wir das homogene Dirichletproblem für Q in geeigneter Weise verallgemeinern. Dazu fassen wir Q als linearen Operator in $L^2(G)$ mit Definitionsbereich $C_o^\infty(G)$ auf und geben dann hinreichende Bedingungen dafür an, daß Q bezüglich eines Hilbertraumes V ($\subset L^2(G)$) koerzitiv ist. Im wesentlichen bedeutet diese Koerzitivität das Bestehen einer (verallgemeinerten) Gårdingschen Ungleichung der Form

$$\mathrm{Re}(Qu,u)_o \geq p\|u\|_V^2 - c_o\|u\|_o^2 \qquad \forall u \in C_o^\infty(G)$$

mit $p > 0$ und $c_o \in \mathbb{R}$, wobei $(\cdot,\cdot)_o$ und $\|\cdot\|_o$ das Skalarprodukt bzw. die Norm in $L^2(G)$ bezeichnen und $\|\cdot\|_V$ die von einem (der Struktur von Q angepaßten) Skalarprodukt induzierte Norm auf V ist. Beim Beweis der Gårdingschen Ungleichung benutzen wir die in Jacob [15], [15'] dargestellten Methoden. Die Koerzitivität des Operators Q erlaubt es nun, ihn zu einem geeigneten abgeschlossenen Operator Q_F fortzusetzen, den wir in Anlehnung an die Theorie der halbbeschränkten symmetrischen

Operatoren (vgl. Weidmann [24], p. 120, und Korollar 3.2.4., unten) die Friedrichs-Fortsetzung von Q nennen werden. Mit Hilfe dieser Fortsetzung definieren wir nun das verallgemeinerte homogene Dirichletproblem für Q als das Problem, die Gleichung

(1) $\quad Q_F u = f$

mit $f \in L^2(G)$ in $D(Q_F)$ zu lösen. Daß dieser Zugang für unser Problem zulässig ist, zeigt ein in Doppel/Jacob [5] bewiesener Spursatz für den Fall, daß $G = G_1 \times G_2$ ist und ∂G_1, ∂G_2 genügend glatt sind. Dieses (in der vorliegenden Arbeit als Satz 4.3.1. zitierte) Ergebnis impliziert, daß jede in $C^1(\overline{G})$ gelegene Lösung von (1) am Rande ∂G verschwindet. Ferner erfüllt Q_F gewisse Resolventenabschätzungen, die es gestatten, mit Hilfe von $Q_F - \lambda I$ ($\lambda \in \mathbb{C}$ geeignet) eine analytische Halbgruppe zu erzeugen und damit das Evolutionsproblem

(2) $\quad u'(t) + Q_F u(t) = f(t) \qquad \forall t \in (0,T] \; ; \; u(0) = u_0$

mit $T > 0$, $f: [0,T] \to L^2(G)$ Hölder-stetig und $u_0 \in L^2(G)$ eindeutig zu lösen.

Ein bei dieser verallgemeinerten Fragestellung offenes Problem ist die Bestimmung des Definitionsbereiches von Q_F . Fassen wir P_r für $r = 1,2$ auf als Operator in $L^2(G_r)$ mit $D(P_r) = C_o^\infty(G_r)$, so läßt sich Q auch als Einschränkung des Tensorproduktes $P_1 \hat{\otimes} P_2$ auf $C_o^\infty(G)$ schreiben. Damit ist es dann möglich, Q_F in einigen Fällen als Tensorprodukt zweier abgeschlossener Operatoren darzustellen und mit deren Hilfe Eigenschaften von Q_F bzw. $D(Q_F)$ herzuleiten.

Der eben dargestellten Vorgehensweise entspricht der Aufbau dieser Arbeit. In Kapitel 2 stellen wir zunächst die für die späteren Ausführungen notwendigen Voraussetzungen über Funktionenräume und Poincarésche Ungleichungen zusammen. Den koerzitiven Operatoren und analytischen Halbgruppen in Hilberträumen haben wir dann das Kapitel 3 gewidmet, das wegen des oben erwähnten Zusammenhangs einen Abschnitt über Tensorprodukte von Hilberträumen und linearen Operatoren enthält. In Kapitel 4 beweisen wir die Koerzitivität von Produkten elliptischer

Differentialoperatoren zweiter Ordnung unter bestimmten Voraussetzungen an ihre Koeffizienten und an die Größe des betrachteten Bereiches G . Hierbei machen wir expliziten Gebrauch von den in Kapitel 2 behandelten Poincarêschen Ungleichungen. Des weiteren zeigen wir mit Hilfe der in Kapitel 3 entwickelten Methoden die Fredholmsche Alternative für das verallgemeinerte Dirichletproblem (1) und die eindeutige Lösbarkeit des Evolutionsproblems (2). Abschließend untersuchen wir in Kapitel 5 den Definitionsbereich der Friedrichs-Fortsetzung eines elliptischen Produktoperators, um in einem gewissen Sinn Regularitätsaussagen für diesen zu erhalten. Dabei werden unter Rückgriff auf die Regularitätstheorie elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung und die in Abschnitt 3.3. dargestellten Ergebnisse über Tensorprodukte determinierende Bereiche für die Friedrichs-Fortsetzung bestimmt.

In diesem Zusammenhang sei abschließend bemerkt, daß die Produktoperatoren nicht hypoelliptisch sind. Wir zeigen diese Behauptung für das Produkt der beiden gewöhnlichen Differentialoperatoren

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \quad \text{und} \quad -\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \ .$$

Der Produktoperator

$$Q = \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$$

besitzt als Symbol das Polynom $q(\xi) = \xi_1^2 \xi_2^2$ $(\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2)$. Wegen

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \xi_1^2} = 2\xi_2^2$$

gilt für die Folge $(\xi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$, $\xi^{(n)} = (\frac{1}{n}, n)$:

$$\xi^{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty \ , \ \frac{\partial^2 q}{\partial \xi_1^2}(\xi^{(n)}) / q(\xi^{(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty \quad ,$$

woraus nach den Ergebnissen von L. Hörmander (vgl. Hörmander [13], p. 99ff) folgt, daß Q nicht hypoelliptisch ist.

2. Funktionenräume

2.1. Allgemeine Bezeichnungsweisen

Bevor wir in diesem Kapitel spezielle Funktionenräume, sogenannte anisotrope Sobolevräume, untersuchen, wollen wir einige Bezeichnungen einführen. Dazu betrachten wir die Halbgruppe $\mathbb{N}_o^n$ aller n-dimensionalen Multiindizes, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_o := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist. In $\mathbb{N}_o^n$ erklären wir eine Halbordnung $\leq$ durch

$$\alpha \leq \beta :\Leftrightarrow \forall j \in \{1,\dots,n\}: \alpha_j \leq \beta_j$$

$$(\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\ ,\ \beta = (\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbb{N}_o^n) \quad .$$

Die Länge $|\alpha|$ eines Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_o^n$ ist gegeben durch

$$|\alpha| := \Sigma_{j=1}^n \alpha_j \quad .$$

Eine ausgezeichnete Rolle spielen die Multiindizes der Länge 1. Bezeichnet ε_j $(j \in \{1,\dots,n\})$ denjenigen Multiindex der Länge 1 in $\mathbb{N}_o^n$, dessen einziger nichtverschwindender Eintrag in der j-ten Komponente steht, so können wir auch

$$\varepsilon_j = (\delta_{jk})_{k\in\{1,\dots,n\}}$$

schreiben.
Für einen Vektor $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ und einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_o^n$ setzen wir ferner

$$x^\alpha := \Pi_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} \quad .$$

Schließlich schreiben wir

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

für $j \in \{1,\dots,n\}$, und setzen, falls $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_o^n$ ist,

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} \quad .$$

2.2. Funktionenräume

Wir beginnen mit den bekannten Räumen stetig differenzierbarer Funktionen. Sei G eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Mit $C^k(G)$ $(k \in \mathbb{N}_o)$ bezeichnen wir den Vektorraum aller komplexwertigen Funktionen auf G , d

k-mal stetig differenzierbar sind. $C_o^k(G)$ bezeichne den Raum aller Funktionen aus $C^k(G)$ mit kompaktem Träger in G . Weiter definieren wir $C^k(\bar{G})$ als den Unterraum von $C^k(G)$, der aus allen Funktionen u besteht, für die $D^\alpha u$ für $|\alpha| \leq k$ eine stetige Fortsetzung auf $\bar{G}$ (den topologischen Abschluß von G in $\mathbb{R}^n$) besitzt. Wie üblich setzen wir weiter

$$C_*^k(G) := \{u \in C^k(G) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}_o^n: |\alpha| \leq k \Rightarrow D^\alpha u \in L^2(G)\}$$

sowie

$$C_o^\infty(G) := \cap_{k\in\mathbb{N}} C_o^k(G) \quad , \quad C^\infty(\bar{G}) := \cap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\bar{G}) \quad .$$

Dabei bezeichnet $L^2(G)$ den Hilbertraum aller bezüglich des Lebesguemaßes meßbaren und quadratisch integrierbaren Funktionen auf G mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{o,G} = \int_G u(x)\overline{v(x)}dx \qquad \forall u,v \in L^2(G) \quad .$$

Weiterhin sei $L^\infty(G)$ der Raum aller bezüglich des Lebesguemaßes meßbaren und wesentlich beschränkten Funktionen auf G .

Für eine endliche und nichtleere Menge $\Gamma \subset \mathbb{N}_o^n$ von Multiindizes definieren wir eine Sesquilinearform $(\cdot,\cdot)_{\Gamma,G}$ auf $C_*^k(G)$, $k = \max\{|\alpha| \mid \alpha \in \Gamma\}$, durch

$$(u,v)_{\Gamma,G} := \Sigma_{\alpha\in\Gamma}(D^\alpha u, D^\alpha v)_{o,G} + (u,v)_{o,G} \qquad \forall u,v \in C_*^k(G) \quad .$$

Die Vervollständigung von $C_*^k(G)$ bezüglich $(\cdot,\cdot)_{\Gamma,G}$ bezeichnen wir mit $H^\Gamma(G)$, die von $C_o^\infty(G)$ bezüglich $(\cdot,\cdot)_{\Gamma,G}$ mit $H_o^\Gamma(G)$. Die Hilberträume $H^\Gamma(G)$ und $H_o^\Gamma(G)$ werden auch als anisotrope Sobolevräume bezeichnet. Ist $\Gamma = \{\alpha \in \mathbb{N}_o^n \mid |\alpha| \leq m\}$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so schreiben wir

$$H^m(G) := H^\Gamma(G) \quad , \quad H_o^m(G) := H_o^\Gamma(G)$$

und

$$(u,v)_{m,G} := (u,v)_{\Gamma,G} \qquad \forall u,v \in H^m(G) \quad .$$

Man kann nun mit Hilfe der sogenannten Poincaré-Ungleichungen auf $H_o^\Gamma(G)$ ein unserer Problemstellung angepaßteres Skalarprodukt einführen und dann Abschätzungen für die Operatornorm der kanonischen Einbettung $E: H_o^\Gamma(G) \to L^2(G)$ herleiten. Zu diesem Zweck fahren wir mit einem Abschnitt über Poincaré-Ungleichungen fort.

2.3. Poincaré-Ungleichungen

Wir beginnen mit der eindimensionalen Poincaré-Ungleichung.

Proposition 2.3.1. Sei $J = (a,b) \subset \mathbb{R}$ mit $d := b - a$. Dann gilt

$$(1) \quad ||u||_{o,J} \leq \frac{d}{\pi} ||u'||_{o,J}$$

für alle $u \in C^1(\bar{J})$ mit $u(a) = u(b) = 0$.

Für den Beweis vgl. Hardy/Littlewood/Pólya [11], p. 182 ff. und Dym/McKean [8], p. 47 - 48. Wir bemerken, daß die Konstante $\frac{d}{\pi}$ in (1) optimal ist, denn für $w: \bar{J} \to \mathbb{R}$, $w(x) = \sin \frac{\pi}{d} (x - a)$, gilt

$$(2) \quad ||w||_{o,J} = \frac{d}{\pi} ||w'||_{o,J} \quad .$$

Daß die Konstante $\frac{d}{\pi}$ in (1) auch für die kleinere Funktionen-Klasse $C_o^\infty(J)$ optimal ist, zeigt das

Lemma 2.3.2. Sei $J = (a,b) \subset \mathbb{R}$ mit $d := b - a$. Dann gibt es eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_o^\infty(J) \setminus \{0\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||\varphi_n||_{o,J}}{||\varphi_n'||_{o,J}} = \frac{d}{\pi} \quad .$$

Beweis. Sei $w: \bar{J} \to \mathbb{R}$ wie oben durch $w(x) = \sin \frac{\pi}{d} (x - a)$ definiert. Dann ist $w' \in L^2(J)$, und da $C_o^\infty(J)$ in $L^2(J)$ dicht liegt, existiert eine Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_o^\infty(J)$ mit

$$(3) \quad ||\psi_n - w'||_{o,J} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad .$$

Wir wählen nun ein $\eta \in C_o^\infty(J)$ mit $\int_a^b \eta(x)dx = 1$ und setzen für $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(\cdot) := \psi_n(\cdot) - (\int_a^b \psi_n(x)dx)\eta(\cdot) \ , \ \varphi_n(\cdot) := \int_a^\cdot f_n(x)dx \quad .$$

Dann liegen φ_n und f_n in $C_o^\infty(J)$ und es ist $\varphi_n' = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter haben wir wegen (3)

$$(4) \quad \int_a^b \psi_n(x)dx = (\psi_n, 1)_{o,J} \xrightarrow[n\to\infty]{} (w', 1)_{o,J} = w(b) - w(a) = 0 \quad .$$

Also gilt

$$(5)\quad \|\varphi_n' - w'\|_{o,J} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

und wegen Proposition 2.3.1. auch

$$(6)\quad \|\varphi_n - w\|_{o,J} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad .$$

Da wir wegen (6) o.B.d.A. annehmen können, daß $\varphi_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt nun aus (5) und (6) die Behauptung. □

Wir übertragen nun Proposition 2.3.1. auf den mehrdimensionalen Fall.

Proposition 2.3.3. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $G \subset \{x \in \mathbb{R}^n | x_j \in (a,b)\}$ für ein $j \in \{1,\dots,n\}$. Dann gilt mit $d := b - a$

$$\|u\|_{o,G} \leq \frac{d}{\pi} \|D_j u\|_{o,G}$$

für alle $u \in C_o^\infty(G)$.

Beweis. Es sei $J := (a,b)$ und o.B.d.A. $j = 1$. Ist $u \in C_o^\infty(G)$, so können wir u durch Null auf $J \times \mathbb{R}^{n-1}$ fortsetzen, und erhalten nach Proposition 2.3.1. für jedes $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\|u(\cdot,x')\|_{o,J} \leq \frac{d}{\pi} \|D_1 u(\cdot,x')\|_{o,J} \quad .$$

Daraus folgt sofort

$$\|u\|_{o,G}^2 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_a^b |u(t,x')|^2 dt dx' \leq \frac{d^2}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_a^b |D_1 u(t,x')|^2 dt dx' =$$

$$= \frac{d^2}{\pi^2} \|D_1 u\|_{o,G}^2 \quad .$$ □

Wir wollen die bisherigen Ergebnisse dazu benutzen, um auf dem anisotropen Sobolevraum $H_o^\Gamma(G)$ ($G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Gamma \subset \mathbb{N}_o^n$ endlich und nichtleer) ein äquivalentes Skalarprodukt einzuführen. Dazu setzen wir für jedes $j \in \{1,\dots,n\}$

$$d_j(G) := \sup\{|s - t| \mid s,t \in pr_j(G)\}$$

($pr_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezeichne dabei die Projektion auf die j-te Komponente) sowie unter Benutzung der Konvention $\infty^0 := 1$

$$d_\Gamma(G) := \min_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\Gamma} \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{d_j(G)}{\pi}\right]^{\alpha_j} \quad .$$

Dann folgt aus Proposition 2.3.3. für jedes $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \Gamma$ und $\varphi \in C_o^\infty(G)$

$$||\varphi||_{o,G} \le \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{d_j(G)}{\pi}\right]^{\alpha_j} \left(\Sigma_{\beta\in\Gamma} ||D^\beta\varphi||^2_{o,G}\right)^{1/2}$$

und wir haben die

Proposition 2.3.4. Für alle $\varphi \in C_o^\infty(G)$ gilt die Abschätzung

$$(7) \quad ||\varphi||_{o,G} \le d_\Gamma(G) \left(\Sigma_{\beta\in\Gamma} ||D^\beta\varphi||^2_{o,G}\right)^{1/2} \quad .$$

Ist insbesondere $d_\Gamma(G) < \infty$, so sind die Skalarprodukte $(\cdot,\cdot)_{\Gamma,G}$ und $\Sigma_{\beta\in\Gamma}(D^\beta\cdot, D^\beta\cdot)_{o,G}$ auf $H_o^\Gamma(G)$ äquivalent. □

Da wir im folgenden stets beschränkte offene Mengen betrachten werden, wird die Bedingung $d_\Gamma(G) < \infty$ immer erfüllt sein. Im weiteren setzen wir

$$\langle u,v\rangle_{\Gamma,G} := \Sigma_{\beta\in\Gamma}(D^\beta u, D^\beta v)_{o,G} \qquad \forall u,v \in H_o^\Gamma(G)$$

sowie

$$||u||_{\Gamma,G} := \langle u,u\rangle^{1/2}_{\Gamma,G} \qquad \forall u \in H_o^\Gamma(G) \quad .$$

Wir notieren noch eine Folgerung aus Proposition 2.3.4.

Korollar 2.3.5. Für $d_\Gamma(G) < \infty$ ist der Hilbertraum $(H_o^\Gamma(G), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\Gamma,G})$ stetig und dicht in $L^2(G)$ eingebettet und für die Operatornorm der Einbettung $E: H_o^\Gamma(G) \to L^2(G)$ gilt die Abschätzung

$$||E|| \le d_\Gamma(G) \quad .$$

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus der Abschätzung (7). □

Abschließend wollen wir noch für den Fall $n = 2$ eine notwendige Bedingung für das Bestehen einer Ehrlingschen Ungleichung herleiten.

Proposition 2.3.6. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen und es gebe Konstanten $\delta \geq 0$, $c > 0$ mit

$$(8) \quad ||u_x||^2_{0,G} \leq \delta ||u_{xy}||^2_{0,G} + c||u||^2_{0,G}$$

für alle $u \in C^\infty_0(G)$. Ist $J \times J' \subset G$ für zwei Intervalle $J = (a,b)$, $J' = (a',b')$, so gilt mit $d' = b' - a'$

$$\delta \geq \frac{d'^2}{\pi^2} \quad .$$

Beweis. Für zwei Funktionen $f \in C^\infty_0(J)$ und $g \in C^\infty_0(J')$ liegt die durch

$$u(x,y) = \begin{cases} f(x)g(y) & , \quad (x,y) \in J \times J' \\ 0 & , \quad (x,y) \in G \setminus (J \times J') \end{cases}$$

definierte Funktion $u: G \to \mathbb{C}$ in $C^\infty_0(G)$ und wegen des Satzes von Fubini gilt

$$(9) \quad ||u||^2_{0,G} = ||f||^2_{0,J}||g||^2_{0,J'} \; ; \; ||u_x||^2_{0,G} = ||f'||^2_{0,J}||g||^2_{0,J'} \; ;$$

$$||u_{xy}||^2_{0,G} = ||f'||^2_{0,J}||g'||^2_{0,J'} \quad .$$

Aus (8) und (9) folgt nun

$$||f'||^2_{0,J}||g||^2_{0,J'} \leq \delta ||f'||^2_{0,J}||g'||^2_{0,J'} + c||f||^2_{0,J}||g||^2_{0,J'}$$

für alle $f \in C^\infty_0(J)$ und $g \in C^\infty_0(J')$.
Für ein festes $g \in C^\infty_0(J') \setminus \{0\}$ gilt deshalb

$$(10) \quad (||g||^2_{0,J'} - \delta ||g'||^2_{0,J'})||f'||^2_{0,J} \leq c||g||^2_{0,J'}||f||^2_{0,J} \qquad \forall f \in C^\infty_0(J) \quad .$$

Da die Abbildung

$$L^2(J) \supset C^\infty_0(J) \ni f \mapsto f' \in L^2(J)$$

nicht stetig ist, folgt aus (10)

$$||g||^2_{0,J'} - \delta ||g'||^2_{0,J'} \leq 0 \qquad \forall g \in C^\infty_0(J') \setminus \{0\}$$

und, da diese Ungleichung für $g = 0$ trivialerweise erfüllt ist,

$$||g||^2_{0,J'} \leq \delta ||g'||^2_{0,J'} \qquad \forall g \in C^\infty_0(J') \quad .$$

Wegen Proposition 2.3.1. und Lemma 2.3.2. folgt hieraus $\delta \geq \frac{d'^2}{\pi^2}$.

□

3. Koerzitive Operatoren in Hilberträumen und analytische Halbgruppen

3.1. Einige Ergebnisse aus der Theorie der linearen Operatoren in Hilberträumen

Sei H ein komplexer Hilbertraum und T ein dichtdefinierter linearer Operator in H. Mit $D(T)$ bezeichnen wir den Definitionsbereich von T, mit

$$R(T) := \{Tx \mid x \in D(T)\}$$

das Bild von T und mit

$$G(T) := \{(x,Tx) \in H \times H \mid x \in D(T)\}$$

den Graphen von T. Sind T_1, T_2 zwei dichtdefinierte lineare Operatoren in H, so heißt T_2 Fortsetzung von T_1 (in Zeichen: $T_1 \subset T_2$), wenn $G(T_1) \subset G(T_2)$ gilt.

Der Operator T heißt abgeschlossen, wenn $G(T)$ in $H \times H$ abgeschlossen ist, und abschließbar, wenn er eine abgeschlossene Fortsetzung besitzt. T ist offensichtlich genau dann abschließbar, wenn der Abschluß $\overline{G(T)}$ von $G(T)$ in $H \times H$ der Graph eines Operators in H ist, und in diesem Fall existiert genau ein Operator $\overline{T}$ in H mit $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. $\overline{T}$ heißt der Abschluß von T.

Die Menge aller dichtdefinierten linearen abgeschlossenen Operatoren in H werden wir im folgenden mit $A(H)$ bezeichnen.

Ist $T \in A(H)$ und D ein Unterraum von $D(T)$ mit $\overline{T_{|D}} = T$, so heißt D determinierender Bereich für T.

Ein linearer Operator T in H induziert ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_T$ auf $D(T)$:

$$(x,y)_T := (x,y)_H + (Tx,Ty)_H \qquad \forall x,y \in D(T) \quad .$$

Die von $(\cdot,\cdot)_T$ erzeugte Norm $\|\cdot\|_T$ heißt Graphennorm von T.

Wir erwähnen die folgende Charakterisierung abgeschlossener Operatoren (vgl. Weidmann [24], Satz 5.1, p. 89 - 90):

Ein Operator T ist genau dann abgeschlossen, wenn D(T) bezüglich der Graphennorm $||\cdot||_T$ vollständig ist.

Für einen dichtdefinierten linearen Operator T bezeichnen wir seinen adjungierten Operator mit T* , und nennen T symmetrisch, wenn $T \subset T^*$, und selbstadjungiert, wenn $T = T^*$ ist.

Den identischen Operator in H bezeichnen wir im folgenden mit I_H , oder, wenn aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, welcher Hilbertraum gemeint ist, kurz mit I .

Ist V ein weiterer Hilbertraum, so schreiben wir L(V,H) für den Raum aller linearen stetigen Abbildungen von V nach H . Schließlich setzen wir L(H) := L(H,H) .

Die Resolventenmenge $\rho(T)$ eines dichtdefinierten linearen Operators T ist definiert als die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $T - \lambda I: D(T) \to H$ bijektiv und $(T - \lambda I)^{-1} \in L(H)$ ist. Die Menge

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

heißt das Spektrum von T . Aus der Tatsache, daß für einen Operator $R \in L(H)$ mit $||R|| < 1$ der Operator R - I invertierbar und $||(R - I)^{-1}|| \leq (1 - ||R||)^{-1}$ ist, können wir nun auf die Offenheit von $\rho(T)$ schließen. Denn ist $\lambda_0 \in \rho(T)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$(1) \quad |\lambda - \lambda_0| < ||(T - \lambda_0 I)^{-1}||^{-1}$$

so folgt aus der Identität

$$T - \lambda I = (T - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0) I = (T - \lambda_0 I)(I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}) \quad ,$$

daß auch $T - \lambda I$ invertierbar ist mit

$$(2) \quad ||(T - \lambda I)^{-1}|| \leq \frac{||(T - \lambda_0 I)^{-1}||}{1 - |\lambda - \lambda_0| \, ||(T - \lambda_0 I)^{-1}||} \quad .$$

Als eine erste Anwendung dieser Begriffsbildungen leiten wir nun ein im nächsten Abschnitt benötigtes Resultat her.

Proposition 3.1.1. Sei T ein dichtdefinierter linearer Operator in H mit $\{\tau i \mid \tau \in \mathbb{R}\} \subset \rho(T)$ und

$$(3) \qquad \|\tau(T - \tau iI)^{-1}\| \leq K \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

für eine gewisse Konstante $K > 0$. Dann existiert ein $\omega > 0$ mit

$$\{\lambda \in \mathbb{C}^* \mid |\arg\lambda - \tfrac{\pi}{2}| \leq \omega\} \subset \rho(T)$$

und

$$\|\lambda(T - \lambda I)^{-1}\| \leq 2K + 1$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}^*$ mit $|\arg\lambda - \frac{\pi}{2}| \leq \omega$ $\qquad (\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\})$.

Beweis. Wir wählen $\omega := \operatorname{arctg}(2K)^{-1}$. Dann ist $|\arg\lambda - \frac{\pi}{2}| \leq \omega$ äquivalent zu $|\mathrm{Re}\lambda| \leq (2K)^{-1}|\mathrm{Im}\lambda|$. Setzen wir $\tau := \mathrm{Im}\lambda$ und beachten wir, daß $\tau i \in \rho(T)$ und wegen (3)

$$\|(T - \tau iI)^{-1}\| \leq \frac{K}{|\tau|}$$

ist, so folgt

$$|\lambda - \tau i| = |\mathrm{Re}\lambda| \leq \frac{1}{2K}|\tau| < \frac{1}{\|(T - \tau iI)^{-1}\|} \ .$$

Wegen (1) ist deshalb $\lambda \in \rho(T)$ und es folgt wegen (2) schließlich

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{2K}{|\tau|} \leq \frac{2K + 1}{|\lambda|} \ ,$$

wobei in der letzten Ungleichung die Abschätzung

$$|\lambda| \leq |\tau| + |\lambda - \tau i| \leq (1 + \frac{1}{2K})|\tau|$$

einging. □

3.2. Das Spektrum koerzitiver Operatoren in Hilberträumen

Sei H ein Hilbertraum und V ein in H stetig und dicht eingebetteter Hilbertraum, wobei wir o.B.d.A. $V \neq H$ voraussetzen. Im folgenden bezeichne α die Operatornorm der Einbettung $E: V \to H$.

Definition 3.2.1. Ein linearer Operator A in H heißt V-koerzitiv, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) D(A) ist dichter Unterraum von V .

(ii) Es gibt ein $C > 0$ mit

$$|(Au,v)_H| \leq C||u||_V||v||_V \qquad \forall u,v \in D(A) \quad .$$

(iii) Es gibt Konstanten $p > 0$ und $c_o \in \mathbb{R}$ derart, daß

$$\mathrm{Re}(Au,u)_H \geq p||u||_V^2 - c_o||u||_H^2 \qquad \forall u \in D(A)$$

(Gårdingsche Ungleichung).

Ein V-koerzitiver Operator A heißt V-elliptisch, wenn die Konstante c_o in der Bedingung (iii) nicht-positiv gewählt werden kann.

Im folgenden sei A ein V-koerzitiver Operator in H und

$$\beta_A(u,v) := (Au,v)_H \qquad \forall u,v \in D(A) \quad .$$

Wegen (i) und (ii) besitzt β_A eine stetige Fortsetzung auf $V \times V$, für die wegen (iii) die Gårdingsche Ungleichung

$$(1) \quad \mathrm{Re}\beta_A(u,u) \geq p||u||_V^2 - c_o||u||_H^2 \qquad \forall u \in V$$

erfüllt ist.

Wir konstruieren nun eine natürliche abgeschlossene Fortsetzung A_F von A , die wir als Friedrichs-Fortsetzung von A bezeichnen werden. Zu diesem Zweck setzen wir

$$D(A_F) := \{u \in V \mid \exists h \in H \ \forall v \in V: \beta_A(u,v) = (h,v)_H\}$$

und definieren $A_F u$ für $u \in D(A_F)$ durch die Beziehung

$$(A_F u,v)_H := \beta_A(u,v) \qquad \forall v \in V \quad .$$

Es gilt die

Proposition 3.2.2. A_F ist eine abgeschlossene lineare Fortsetzung von A .

Beweis. Daß A_F ein linearer Operator in H ist, ist offensichtlich. Des weiteren haben wir für alle $u \in D(A)$:

$$\beta_A(u,v) = (Au,v)_H \qquad \forall v \in V \quad ,$$

mithin also $u \in D(A_F)$ und $A_F u = Au$ für alle $u \in D(A)$. Daraus folgt $A \subset A_F$.

Sei schließlich $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A_F)$ eine Folge mit $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ und $f_n := A_F u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ in H . Dann gilt

$$p||u_n - u_m||_V^2 \le \mathrm{Re}\beta_A(u_n - u_m, u_n - u_m) + c_o||u_n - u_m||_H^2$$

$$= \mathrm{Re}(f_n - f_m, u_n - u_m)_H + c_o||u_n - u_m||_H^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \quad .$$

Also liegt u in V und es gilt $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ in V . Durch Grenzübergang folgt aus $\beta_A(u_n,v) = (f_n,v)_H \quad \forall v \in V$ für $n \to \infty$

$$\beta_A(u,v) = (f,v) \qquad \forall v \in V \quad ,$$

d.h. $u \in D(A_F)$ und $A_F u = f$. □

Für das Spektrum von A_F gilt jetzt die

Proposition 3.2.3. $\mathrm{Re}\sigma(A_F) \subset [p\alpha^{-2} - c_o, \infty)$

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\lambda < p\alpha^{-2} - c_o$. Wir setzen $\eta := p\alpha^{-2} - c_o - \mathrm{Re}\lambda$ und $\varepsilon := \min(1, \eta\alpha^2 p^{-1})$. Dann gilt für alle $u \in V$ (man beachte die Beziehung $||u||_H \le \alpha||u||_V$):

$$\mathrm{Re}(\beta_A(u,u) - \lambda||u||_H^2) \ge p||u||_V^2 - (\mathrm{Re}\lambda + c_o)||u||_H^2$$

$$\ge \varepsilon p||u||_V^2 + (\eta - p\alpha^{-2}\varepsilon)||u||_H^2$$

$$\ge \varepsilon p||u||_V^2 \quad ,$$

d.h. $A - \lambda I$ ist V-elliptisch.

Nach dem Satz von Lax-Milgram (vgl. Friedman [10], p. 41) folgt nun die Existenz einer linearen Isomorphie $B \in L(V)$ mit

$$(2) \qquad \beta_A(u,v) - \lambda(u,v)_H = (Bu,v)_V \qquad \forall u,v \in V \quad .$$

Sei $f \in H$. Dann ist das antilineare Funktional $(f,\cdot)_H : V \to \mathbb{C}$ stetig und nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert ein eindeutig bestimmtes $w \in V$ mit

$$(f,v)_H = (w,v)_V \qquad \forall v \in V \quad .$$

Sei $u := B^{-1}w$. Dann gilt

$$\beta_A(u,v) - \lambda(u,v)_H = (w,v)_V = (f,v)_H \qquad \forall v \in V \quad .$$

Also ist $u \in D(A_F)$ und $(A_F - \lambda I)u = f$. Es folgt, daß $A_F - \lambda I$ surjektiv und wegen (2) auch injektiv ist. Schließlich zeigt die Abschätzung

$$||(A_F - \lambda I)^{-1} f||_H = ||u||_H \leq \alpha ||B^{-1}|| \; ||w||_V \leq \alpha^2 ||B^{-1}|| \; ||f||_H \quad ,$$

daß $(A_F - \lambda I)^{-1}$ stetig ist. Es folgt $\lambda \in \rho(A_F)$ und damit die Behauptung. □

Korollar 3.2.4. Ist $A: D(A) \to H$ V-koerzitiv und symmetrisch (d.h. $A \subset A^*$) , so ist die Friedrichs-Fortsetzung A_F von A selbstadjungiert.

Beweis. Sei $\sigma_o < p\alpha^{-2} - c_o$. Wir zeigen, daß $B := A_F - \sigma_o I$ selbstadjungiert ist, woraus dann die Behauptung folgt. Offensichtlich ist B symmetrisch und abgeschlossen. Weiter ist nach Proposition 3.2.3. $\{i,-i\} \subset \rho(B)$, mithin ist also

$$R(B + iI)^{\perp} = \{0\} \quad , \quad R(B - iI)^{\perp} = \{0\} \quad .$$

Wegen der ersten von-Neumannschen Formel (vgl. Weidmann [24], Satz 8.11., p. 223) folgt hieraus

$$D(B^*) = D(B) \oplus R(B + iI)^{\perp} \oplus R(B - iI)^{\perp} = D(B) \quad .$$ □

Wir leiten nun eine grundlegende Resolventenabschätzung für den Operator A_F her.

Proposition 3.2.5. Seien $\sigma_o < p\alpha^{-2} - c_o$ und $B := A_F - \sigma_o I$. Dann gilt:

(i) $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid Re\lambda \leq 0\} \subset \rho(B)$.

(ii) Es gibt ein $K_o > 0$ so, daß für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $Re\lambda \leq 0$

$$||\lambda(B - \lambda I)^{-1}|| \leq K_o$$

ist.

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt sofort aus Proposition 3.2.3. Zum Beweis des zweiten Teils setzen wir $\eta := p\alpha^{-2} - c_o - \sigma_o > 0$

und $\varepsilon := \min\{1, \eta\alpha^2 p^{-1}\}$. Damit folgt nun für alle $u \in D(A_E) = D(B)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $Re\lambda \leq 0$ (man vgl. den Beweis von Proposition 3.2.3.)

$$(3) \quad Re((B - \lambda I)u,u)_H \geq Re\beta_A(u,u) - (\sigma_o + Re\lambda)||u||_H^2$$

$$\geq \varepsilon p||u||_V^2 + |Re\lambda|\,||u||_H^2 \quad .$$

Insbesondere folgt also

$$(4) \quad |Re\lambda|\,||(B - \lambda I)^{-1}|| \leq 1 \quad .$$

Man beachte nun weiter, daß für jedes $u \in D(B)$ eine der beiden folgenden Ungleichungen gilt

$$(5) \quad |Im((B - \lambda I)u,u)_H| \geq \frac{1}{2}|Im\lambda|\,||u||_H^2 \quad ,$$

$$(6) \quad Re((B - \lambda I)u,u)_H \geq \frac{\varepsilon p}{2C'}|Im\lambda|\,||u||_H^2 \qquad (C' = C + \alpha^2|\sigma_o|) \quad .$$

Denn ist $u \in D(B)$ und die Ungleichung (5) für dieses u falsch, so folgt

$$|Im\lambda|\,||u||_H^2 - C'||u||_V^2 \leq |Im((B - \lambda I)u,u)_H| < \frac{1}{2}|Im\lambda|\,||u||_H^2 \quad ,$$

d.h.

$$\frac{1}{2}|Im\lambda|\,||u||_H^2 < C'||u||_V^2 \quad .$$

Wegen (3) folgt dann daraus die Ungleichung (6).
Insgesamt folgt aus (5) und (6) (man beachte $\frac{\varepsilon p}{C'} \leq 1$)

$$|((B - \lambda I)u,u)_H| \geq \frac{\varepsilon p}{2C'}|Im\lambda|\,||u||_H^2 \qquad \forall u \in D(B)$$

und damit

$$(7) \quad |Im\lambda|\,||(B - \lambda I)^{-1}|| \leq \frac{2C'}{\varepsilon p} \quad .$$

Aus (4) und (7) erhalten wir schließlich durch Addition

$$|\lambda|\,||(B - \lambda I)^{-1}|| \leq (|Re\lambda| + |Im\lambda|)||(B - \lambda I)^{-1}|| \leq K_o$$

mit $K_o := 1 + \frac{2C'}{\varepsilon p}$, d.h. die Behauptung. □

In Hinblick auf eine bequemere Formulierung der sich aus Proposition 3.2.5. ergebenden Konsequenzen und deren Anwendung im Abschnitt über analytische Halbgruppen definieren wir schon an dieser Stelle für einen Winkel $\theta \in [0,\frac{\pi}{2})$ den Sektor S_θ durch ($\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$)

(8) $\quad S_\theta := \{\lambda \in \mathbb{C}^* \mid |\arg\lambda| < \theta\}$.

Korollar 3.2.6. Sei A V-koerzitiver Operator in H , $\sigma_o < p\alpha^{-2} - c_o$ und $B := A_F - \sigma_o I$. Dann gibt es ein $\theta \in [0,\frac{\pi}{2})$ mit

(i) $\quad \sigma(B) \subset \overline{S_\theta} \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\lambda \geq p\alpha^{-2} - c_o - \sigma_o\}$.

(ii) Es gibt ein $K > 0$ mit

$$\|\lambda(B - \lambda I)^{-1}\| \leq K \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}\setminus\overline{S_\theta} \quad .$$

Beweis. Nach Proposition 3.2.5. erfüllt der Operator B die Voraussetzungen der Proposition 3.1.1. Folglich existiert ein $\omega \in (0,\frac{\pi}{2}]$ mit

$$\{\lambda \in \mathbb{C}^* \mid |\arg\lambda - \tfrac{\pi}{2}| < \omega\} \subset \rho(B)$$

und

$$\|\lambda(B - \lambda I)^{-1}\| \leq 2K_o + 1$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}^*$ mit $|\arg\lambda - \frac{\pi}{2}| < \omega$, wobei K_o die positive Konstante aus Proposition 3.2.5. bedeutet. Die Behauptung folgt nun mit $\theta := \frac{\pi}{2} - \omega$ und $K := 2K_o + 1$ aus den Propositionen 3.2.3. und 3.2.5. □

3.3. Tensorprodukte von Hilberträumen und von linearen Operatoren in Hilberträumen

Seien V_1 und V_2 zwei komplexe Vektorräume. Wir definieren zunächst das algebraische Tensorprodukt $V_1 \otimes V_2$. Dazu betrachten wir den Vektorraum $L_2(V_1^*, V_2^*, \mathbb{C})$ aller Bilinearformen auf dem kartesischen Produkt der algebraischen Dualräume V_1^* und V_2^* (zur Bezeichnungsweise vgl. die Anhänge in Dieudonné [3], [4]).

Für zwei Elemente $f \in V_1$, $g \in V_2$ definieren wir ihr Tensorprodukt $f \otimes g \in L_2(V_1^*, V_2^*, \mathbb{C})$ durch

$$(f \otimes g)(x^*,y^*) := \langle x^*,f\rangle \langle y^*,g\rangle \qquad \forall (x^*,y^*) \in V_1^* \times V_2^* \ .$$

Die Bilinearform $f \otimes g$ heißt dann auch der von f und g induzierte einfache Tensor. Als das algebraische Tensorprodukt $V_1 \otimes V_2$ bezeichnen wir nun den von allen einfachen Tensoren aufgespannten Unterraum von $L_2(V_1^*,V_2^*,\mathbb{C})$.

Beispiel 3.3.1. Seien $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ offen. Wir betrachten das algebraische Tensorprodukt $C_o^\infty(G_1) \otimes C_o^\infty(G_2)$. Dann kann man zeigen (vgl. Treves [23], p. 407 ff.), daß $C_o^\infty(G_1) \otimes C_o^\infty(G_2)$ als derjenige Unterraum von $C_o^\infty(G_1 \times G_2)$ aufgefaßt werden kann, der aus allen Funktionen $h: G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}$ der Form

$$h(x,y) = \sum_{j=1}^{k} c_j f_j(x) g_j(y) \qquad \forall (x,y) \in G_1 \times G_2$$

mit $k \in \mathbb{N}$ und $c_j \in \mathbb{C}$, $f_j \in C_o^\infty(G_1)$, $g_j \in C_o^\infty(G_2)$ für $j = 1,\ldots,k$ besteht. Wir erwähnen abschließend, daß $C_o^\infty(G_1) \otimes C_o^\infty(G_2)$ in $C_o^\infty(G_1 \times G_2)$ bezüglich der kanonischen lokalkonvexen Topologie folgendicht ist (vgl. Treves [23], Theorem 39.2., p. 409).

Seien nun H_1,H_2 zwei komplexe Hilberträume. Für zwei Elemente $x,y \in H_1 \otimes H_2$ mit

$$x = \sum_{j=1}^{m} c_j f_j \otimes g_j \ , \ y = \sum_{k=1}^{n} c_k' f_k' \otimes g_k'$$

$(c_j,c_k' \in \mathbb{C}$; $f_j,f_k' \in H_1$; $g_j,g_k' \in H_2)$ definieren wir eine Sesquilinearform $s: (H_1 \otimes H_2) \times (H_1 \otimes H_2) \to \mathbb{C}$ durch

$$(1) \qquad s(x,y) := \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c_k'} (f_j,f_k')_{H_1} (g_j,g_k')_{H_2} \ .$$

Die Form s erweist sich als wohldefiniert und positiv-definit (vgl. Weidmann [24], p. 52; Reed/Simon [17], p. 49 - 50), so daß $H_1 \otimes H_2$ durch s zu einem Prähilbertraum wird. Die Vervollständigung von $H_1 \otimes H_2$ bezüglich s heißt vollständiges Tensorprodukt (oder kurz Tensorprodukt) der Räume H_1 und H_2 und wird mit $H_1 \hat{\otimes} H_2$ bezeichnet.

Für eine erste Anwendung dieser Begriffsbildungen benötigen wir das folgende

Lemma 3.3.2. Seien H_1, H_2 zwei komplexe Hilberträume und M_1 bzw. M_2 totale Teilmengen von H_1 bzw. H_2. Dann ist

$$\{f \otimes g \mid f \in M_1 , g \in M_2\}$$

eine totale Teilmenge von $H_1 \hat{\otimes} H_2$. (Dabei heißt eine Teilmenge M eines Hilbertraumes H total, wenn ihre lineare Hülle in H dicht liegt).

Für den Beweis vgl. Weidmann [24], p. 52 - 53.

Für Formulierung und Beweis des nächsten Satzes führen wir noch eine abkürzende Schreibweise ein. Seien dazu $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ offen. Für zwei Funktionen $f \in L^2(G_1)$ und $g \in L^2(G_2)$ definieren wir eine Funktion $f \otimes' g: G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}$ durch

$$(2) \quad (f \otimes' g)(x,y) := f(x)g(y) \qquad \forall (x,y) \in G_1 \times G_2 \quad .$$

Der Satz von Fubini zeigt nun, daß $f \otimes' g \in L^2(G_1 \times G_2)$ ist, und daß für zwei Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(G_1)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(G_2)$ die folgende Implikation gilt:

$$(3) \quad \|f_n - f\|_{0,G_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \, , \, \|g_n - g\|_{0,G_2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f_n \otimes' g_n - f \otimes' g\|_{0,G_1\times G_2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad .$$

Wir beweisen nun den

Satz 3.3.3. Seien $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ offen und beschränkt und $\Gamma_1 \subset \mathbb{N}_0^{m_1}$, $\Gamma_2 \subset \mathbb{N}_0^{m_2}$ endliche, nichtleere Mengen von Multiindizes. Dann existiert ein isometrischer Isomorphismus

$$U: H_0^{\Gamma_1}(G_1) \hat{\otimes} H_0^{\Gamma_2}(G_2) \to H_0^{\Gamma_1\times\Gamma_2}(G_1 \times G_2)$$

mit

$$(4) \quad U(f \otimes g) = f \otimes' g \qquad \forall f \in H_0^{\Gamma_1}(G_1) \, , \, g \in H_0^{\Gamma_2}(G_2) \quad .$$

Insbesondere sind also $L^2(G_1) \hat{\otimes} L^2(G_2)$ und $L^2(G_1 \times G_2)$ isometrisch isomorph.

Beweis: Zur Konstruktion der unitären Abbildung U genügt es, diese auf einer totalen Teilmenge M von $H_o^{\Gamma_1}(G_1) \hat{\otimes} H_o^{\Gamma_2}(G_2)$ zu definieren und zu zeigen, daß U(M) total in $H_o^{\Gamma_1\times\Gamma_2}(G_1 \times G_2)$ ist und für beliebige $h_1, h_2 \in M$ die Bedingung

$$(5) \quad \langle U(h_1), U(h_2)\rangle_{\Gamma_1\times\Gamma_2, G_1\times G_2} = s(h_1, h_2)$$

erfüllt ist (dabei bezeichne s das Skalarprodukt von $H_o^{\Gamma_1}(G_1) \otimes H_o^{\Gamma_2}(G_2)$). Zu diesem Zweck setzen wir

$$M := \{f \otimes g \mid f \in C_o^\infty(G_1) \ , \ g \in C_o^\infty(G_2)\} \ .$$

Da $C_o^\infty(G_j)$ in $H_o^{\Gamma_j}(G_j)$ für j = 1,2 dicht liegt, folgt aus Lemma 3.3.2., daß M eine totale Teilmenge von $H_o^{\Gamma_1}(G_1) \hat{\otimes} H_o^{\Gamma_2}(G_2)$ ist. Wir definieren nun für $f \in C_o^\infty(G_1)$, $g \in C_o^\infty(G_2)$

$$U(f \otimes g) := f \otimes' g \ .$$

Da die lineare Hülle von U(M) in $C_o^\infty(G_1 \times G_2)$ dicht liegt (vgl. Beispiel 3.3.1.) und die Einbettung $C_o^\infty(G_1 \times G_2) \to H_o^{\Gamma_1\times\Gamma_2}(G_1 \times G_2)$ stetig und dicht ist, folgt, daß U(M) totale Teilmenge von $H_o^{\Gamma_1\times\Gamma_2}(G_1 \times G_2)$ ist.

Seien nun weiter $f_j, g_j \in C_o^\infty(G_j)$ (j = 1,2) . Aus (1) und (2) und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} s(f_1 \otimes f_2 \ , \ g_1 \otimes g_2) &\underset{(1)}{=} \langle f_1, g_1\rangle_{\Gamma_1, G_1} \langle f_2, g_2\rangle_{\Gamma_2, G_2} \\ &= \Sigma_{\alpha\in\Gamma_1} (D^\alpha f_1, D^\alpha g_1)_{0, G_1} \Sigma_{\beta\in\Gamma_2} (D^\beta f_2, D^\beta g_2)_{0, G_2} \\ &\underset{(2)}{=} \Sigma_{\gamma\in\Gamma_1\times\Gamma_2} (D^\gamma U(f_1 \otimes f_2), D^\gamma U(g_1 \otimes g_2))_{0, G_1\times G_2} \\ &= \langle U(f_1 \otimes f_2) \ , \ U(g_1 \otimes g_2)\rangle_{\Gamma_1\times\Gamma_2, G_1\times G_2} \ , \end{aligned}$$

womit wir (5) gezeigt haben. Die Identität (4) folgt nun sofort aus (3).

□

Bemerkung 3.3.4. Wegen der kanonischen isometrischen Isomorphie zwischen $L^2(G_1 \times G_2)$ und $L^2(G_1) \hat{\otimes} L^2(G_2)$ und der Beziehung (4) werden

wir im folgenden für zwei Funktionen $f \in L^2(G_1)$, $g \in L^2(G_2)$ die Funktion $f \otimes' g$ mit dem Tensorprodukt $f \otimes g$ identifizieren und statt $f \otimes' g$ stets $f \otimes g$ schreiben.

Beispiel 3.3.5. Seien $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ offen und beschränkt. Wir setzen $\Gamma_1 := \{\mu \in \mathbb{N}_o^{m_1} \mid |\mu| = 1\}$, $\Gamma_2 := \{\nu \in \mathbb{N}_o^{m_2} \mid |\nu| = 1\}$ sowie $\Gamma := \Gamma_1 \times \Gamma_2$. Da sich die Sobolevräume $H_o^1(G_1)$ und $H_o^1(G_2)$ wegen Proposition 2.3.3. in der Form

$$H_o^1(G_1) = H_o^{\Gamma_1}(G_1) \ , \ H_o^1(G_2) = H_o^{\Gamma_2}(G_2)$$

schreiben lassen, folgt aus Satz 3.3.3.

$$H_o^1(G_1) \hat{\otimes} H_o^1(G_2) \cong H_o^{\Gamma}(G_1 \times G_2)$$

im Sinne isometrischer Isomorphie.

Beispiel 3.3.6. Seien G_1 und G_2 wie in Beispiel 3.3.5. gewählt und $f \in H^2(G_1)$, $g \in H^2(G_2)$. Die Definition der Sobolevräume (vgl. Abschnitt 2.2.) und die Eigenschaft (3) zeigen dann sofort, daß die Funktion $f \otimes g$ im Sobolevraum $H^{\Gamma'}(G_1 \times G_2)$ mit
$\Gamma' = \{\mu \in \mathbb{N}_o^{m_1} \mid |\mu| \leq 2\} \times \{\nu \in \mathbb{N}_o^{m_2} \mid |\nu| \leq 2\}$ liegt.
Es folgt weiter, daß das algebraische Tensorprodukt $H^2(G_1) \otimes H^2(G_2)$ als der von allen Funktionen $f \otimes g$, $f \in H^2(G_1)$, $g \in H^2(G_2)$, aufgespannte Unterraum von $H^{\Gamma'}(G_1 \times G_2)$ aufgefaßt werden kann.

Seien nun H_1 und H_2 zwei Hilberträume und $A: D(A) \to H_1$, $B: D(B) \to H_2$ lineare Operatoren in H_1 bzw. H_2 . Wir setzen

$$D(A \otimes B) := D(A) \otimes D(B) \quad ,$$

definieren für $f \in D(A)$, $g \in D(B)$

$$(A \otimes B)\ (f \otimes g) := (Af) \otimes (Bg)$$

und setzen diese Abbildung linear auf $D(A) \otimes D(B)$ fort. Der so gegebene lineare Operator $A \otimes B$ in $H_1 \hat{\otimes} H_2$ ist wohldefiniert (vgl. Weidmann [24], p. 245 - 246; Reed/Simon [17], p. 298 - 299) und heißt algebraisches Tensorprodukt von A und B.

Sind A und B dichtdefiniert und abschließbar, so ist auch $A \otimes B$ dichtdefiniert und abschließbar (vgl. Reed/Simon [17], p. 298 - 299) und wir definieren in diesem Fall das (vollständige) Tensorprodukt $A \hat{\otimes} B$ als den Abschluß von $A \otimes B$.

Das folgende Lemma zeigt, daß unter bestimmten Voraussetzungen das vollständige Tensorprodukt als Friedrichs-Fortsetzung des algebraischen Tensorprodukts interpretiert werden kann.

Lemma 3.3.7. Seien H_1, H_2 Hilberträume und $A: D(A) \to H_1$, $B: D(B) \to H_2$ dichtdefinierte abschließbare Operatoren. Ist $A \otimes B$ V-koerzitiv bezüglich eines Unterraums V von $H_1 \hat{\otimes} H_2$, $(A \otimes B)_F$ injektiv und $A \hat{\otimes} B$ surjektiv, so gilt

$$A \hat{\otimes} B = (A \otimes B)_F \quad .$$

Beweis: Wegen $A \otimes B \subset (A \otimes B)_F$ und der Abgeschlossenheit von $(A \otimes B)_F$ (Proposition 3.2.2.) erhalten wir

$$(6) \quad A \hat{\otimes} B \subset (A \otimes B)_F \quad .$$

Sei nun $x \in D((A \otimes B)_F)$. Dann existiert wegen der vorausgesetzen Surjektivität von $A \hat{\otimes} B$ ein $x' \in D(A \hat{\otimes} B)$ mit

$$(A \hat{\otimes} B)(x') = (A \otimes B)_F(x) \quad .$$

Wegen der Injektivität von $(A \otimes B)_F$ folgt aus (6) $x = x'$ und damit $x \in D(A \hat{\otimes} B)$. □

Analog zum obigen Vorgehen definiert man das Tensorprodukt $A \hat{\otimes} B: V_1 \hat{\otimes} V_2 \to H_1 \hat{\otimes} H_2$ zweier linearer beschränkter Operatoren $A \in L(V_1, H_1)$, $B \in L(V_2, H_2)$ (V_1, V_2, H_1, H_2 Hilberträume), das ebenfalls ein beschränkter Operator mit

$$(7) \quad ||A \hat{\otimes} B|| \leq ||A||\ ||B||$$

ist. Zum Beweis beachten wir die Identität

$$(8) \quad A \hat{\otimes} B = (A \hat{\otimes} I_{H_2}) \circ (I_{V_1} \hat{\otimes} B) \quad .$$

Wir zeigen nun $||(A \hat{\otimes} I_{H_2}|| \leq ||A||$. Die Beziehung $||I_{V_1} \hat{\otimes} B|| \leq ||B||$ folgt dann analog, so daß (8) die Abschätzung (7) impliziert.
Seien $\{\varphi_i \mid i \in I\} \subset V_1$, $\{\psi_j \mid j \in J\} \subset H_2$ Orthonormalbasen. Dann gilt für jede endliche Summe $x = \Sigma_{i,j} c_{ij}(\varphi_i \otimes \psi_j)$

wir im folgenden für zwei Funktionen $f \in L^2(G_1)$, $g \in L^2(G_2)$ die Funktion $f \otimes' g$ mit dem Tensorprodukt $f \otimes g$ identifizieren und statt $f \otimes' g$ stets $f \otimes g$ schreiben.

Beispiel 3.3.5. Seien $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ offen und beschränkt. Wir setzen $\Gamma_1 := \{\mu \in \mathbb{N}_o^{m_1} \mid |\mu| = 1\}$, $\Gamma_2 := \{\nu \in \mathbb{N}_o^{m_2} \mid |\nu| = 1\}$ sowie $\Gamma := \Gamma_1 \times \Gamma_2$. Da sich die Sobolevräume $H_o^1(G_1)$ und $H_o^1(G_2)$ wegen Proposition 2.3.3. in der Form

$$H_o^1(G_1) = H_o^{\Gamma_1}(G_1) \ , \ H_o^1(G_2) = H_o^{\Gamma_2}(G_2)$$

schreiben lassen, folgt aus Satz 3.3.3.

$$H_o^1(G_1) \hat{\otimes} H_o^1(G_2) \cong H_o^{\Gamma}(G_1 \times G_2)$$

im Sinne isometrischer Isomorphie.

Beispiel 3.3.6. Seien G_1 und G_2 wie in Beispiel 3.3.5. gewählt und $f \in H^2(G_1)$, $g \in H^2(G_2)$. Die Definition der Sobolevräume (vgl. Abschnitt 2.2.) und die Eigenschaft (3) zeigen dann sofort, daß die Funktion $f \otimes g$ im Sobolevraum $H^{\Gamma'}(G_1 \times G_2)$ mit
$\Gamma' = \{\mu \in \mathbb{N}_o^{m_1} \mid |\mu| \leq 2\} \times \{\nu \in \mathbb{N}_o^{m_2} \mid |\nu| \leq 2\}$ liegt.
Es folgt weiter, daß das algebraische Tensorprodukt $H^2(G_1) \otimes H^2(G_2)$ als der von allen Funktionen $f \otimes g$, $f \in H^2(G_1)$, $g \in H^2(G_2)$, aufgespannte Unterraum von $H^{\Gamma'}(G_1 \times G_2)$ aufgefaßt werden kann.

Seien nun H_1 und H_2 zwei Hilberträume und $A: D(A) \to H_1$, $B: D(B) \to H_2$ lineare Operatoren in H_1 bzw. H_2 . Wir setzen

$$D(A \otimes B) := D(A) \otimes D(B) \quad ,$$

definieren für $f \in D(A)$, $g \in D(B)$

$$(A \otimes B)\ (f \otimes g) := (Af) \otimes (Bg)$$

und setzen diese Abbildung linear auf $D(A) \otimes D(B)$ fort. Der so gegebene lineare Operator $A \otimes B$ in $H_1 \hat{\otimes} H_2$ ist wohldefiniert (vgl. Weidmann [24], p. 245 - 246; Reed/Simon [17], p. 298 - 299) und heißt algebraisches Tensorprodukt von A und B.

Sind A und B dichtdefiniert und abschließbar, so ist auch $A \otimes B$ dichtdefiniert und abschließbar (vgl. Reed/Simon [17], p. 298 - 299) und wir definieren in diesem Fall das (vollständige) Tensorprodukt $A \hat{\otimes} B$ als den Abschluß von $A \otimes B$.

Das folgende Lemma zeigt, daß unter bestimmten Voraussetzungen das vollständige Tensorprodukt als Friedrichs-Fortsetzung des algebraischen Tensorprodukts interpretiert werden kann.

Lemma 3.3.7. Seien H_1, H_2 Hilberträume und $A: D(A) \to H_1$, $B: D(B) \to H_2$ dichtdefinierte abschließbare Operatoren. Ist $A \otimes B$ V-koerzitiv bezüglich eines Unterraums V von $H_1 \hat{\otimes} H_2$, $(A \otimes B)_F$ injektiv und $A \hat{\otimes} B$ surjektiv, so gilt

$$A \hat{\otimes} B = (A \otimes B)_F \quad .$$

Beweis: Wegen $A \otimes B \subset (A \otimes B)_F$ und der Abgeschlossenheit von $(A \otimes B)_F$ (Proposition 3.2.2.) erhalten wir

$$(6) \qquad A \hat{\otimes} B \subset (A \otimes B)_F \quad .$$

Sei nun $x \in D((A \otimes B)_F)$. Dann existiert wegen der vorausgesetzen Surjektivität von $A \hat{\otimes} B$ ein $x' \in D(A \hat{\otimes} B)$ mit

$$(A \hat{\otimes} B)(x') = (A \otimes B)_F(x) \quad .$$

Wegen der Injektivität von $(A \otimes B)_F$ folgt aus (6) $x = x'$ und damit $x \in D(A \hat{\otimes} B)$. □

Analog zum obigen Vorgehen definiert man das Tensorprodukt $A \hat{\otimes} B: V_1 \hat{\otimes} V_2 \to H_1 \hat{\otimes} H_2$ zweier linearer beschränkter Operatoren $A \in L(V_1, H_1)$, $B \in L(V_2, H_2)$ (V_1, V_2, H_1, H_2 Hilberträume), das ebenfalls ein beschränkter Operator mit

$$(7) \qquad ||A \hat{\otimes} B|| \leq ||A||\ ||B||$$

ist. Zum Beweis beachten wir die Identität

$$(8) \qquad A \hat{\otimes} B = (A \hat{\otimes} I_{H_2}) \circ (I_{V_1} \hat{\otimes} B) \quad .$$

Wir zeigen nun $||(A \hat{\otimes} I_{H_2}|| \leq ||A||$. Die Beziehung $||I_{V_1} \hat{\otimes} B|| \leq ||B||$ folgt dann analog, so daß (8) die Abschätzung (7) impliziert. Seien $\{\varphi_i \mid i \in I\} \subset V_1$, $\{\psi_j \mid j \in J\} \subset H_2$ Orthonormalbasen. Dann gilt für jede endliche Summe $x = \Sigma_{i,j} c_{ij}(\varphi_i \otimes \psi_j)$

$$||(A \hat{\otimes} I_{H_2})(x)||^2_{H_1 \hat{\otimes} H_2} = ||\Sigma_{i,j} c_{ij} (A\varphi_i \otimes \psi_j)||^2_{H_1 \hat{\otimes} H_2}$$

$$\underset{(7)}{\leq} \Sigma_j ||\Sigma_i c_{ij} A\varphi_i||^2_{H_1}$$

$$\leq \Sigma_j ||A||^2 \Sigma_i |c_{ij}|^2 = ||A||^2 ||x||^2_{V_1 \hat{\otimes} H_2} \quad .$$

Da $\{\varphi_i \otimes \psi_j \mid i \in I , j \in J\}$ in $V_1 \hat{\otimes} H_2$ total ist, folgt jetzt die Behauptung.

□

Wir zeigen weiter:

Proposition 3.3.8. Seien V_1, V_2, H_1, H_2 Hilberträume und $A \in L(V_1, H_1)$, $B \in L(V_2, H_2)$ kompakt. Dann ist auch $A \hat{\otimes} B$ kompakt.

Beweis. Da A und B kompakt sind, existieren Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(V_1, H_1)$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(V_2, H_2)$ von Operatoren mit endlichdimensionalem Bild mit

$$||A_n - A|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ , \quad ||B_n - B|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad .$$

Dann hat $A_n \hat{\otimes} B_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlichdimensionales Bild, also folgt aus

$$||A_n \hat{\otimes} B_n - A \hat{\otimes} B|| \leq ||(A_n - A) \hat{\otimes} B_n|| + ||A \hat{\otimes} (B_n - B)||$$

$$\underset{(7)}{\leq} \sup_{n\in\mathbb{N}} ||B_n|| \ ||A_n - A|| + ||A|| \ ||B_n - B|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

die Behauptung.

□

Korollar 3.3.9. Seien $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ offen und beschränkt, $G \subset G_1 \times G_2$ offen und $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{N}_0^{m_1} \mid |\mu| = 1\} \times \{\nu \in \mathbb{N}_0^{m_2} \mid |\nu| = 1\}$. Dann ist die Einbettung $H_0^\Gamma(G) \to L^2(G)$ kompakt.

Beweis. Da nach dem Rellichschen Auswahlsatz (vgl. Agmon [2], p. 99 - 100) die Einbettungen $H_0^1(G_1) \to L^2(G_1)$ und $H_0^1(G_2) \to L^2(G_2)$ kompakt sind, ist nach Satz 3.3.3. und Proposition 3.3.8. auch die Einbettung $H_0^\Gamma(G_1 \times G_2) \to L^2(G_1 \times G_2)$ kompakt (vgl. Beispiel 3.3.5.). Ist nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $H_0^\Gamma(G)$ beschränkte Folge, so existiert eine in $L^2(G_1 \times G_2)$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die auch in $L^2(G)$ konvergiert.

□

3.4. Analytische Halbgruppen in Hilberträumen

In diesem Abschnitt stellen wir einige Ergebnisse aus der Theorie der Operatorhalbgruppen zusammen und zeigen den Zusammenhang zwischen koerzitiven Operatoren und analytischen Halbgruppen auf.

Wir erinnern zunächst an den Begriff der starkstetigen Operatorhalbgruppe. Sei H ein Hilbertraum. Eine Familie $\{T(t) \mid t \in [0,\infty)\} \subset L(H)$ heißt starkstetige (Operator-) Halbgruppe in H , wenn gilt:

(1) $T(0) = I$

(2) $T(s + t) = T(s)T(t) \qquad \forall s,t \in (0,\infty)$

(3) Für jedes $x \in H$ ist die Abbildung
$[0,\infty) \ni t \to T(t)x \in H$
stetig.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so existiert ein eindeutig bestimmter Operator $A \in \mathcal{A}(H)$ mit

$$Ax = \lim_{t \to 0+} t^{-1}(I - T(t))x \qquad \forall x \in D(A) \quad .$$

A hat folgende Eigenschaften (vgl. Dunford/Schwartz [7], p. 619 ff.)

(4) $\forall t \in (0,\infty) \quad \forall x \in H: T(t)x \in D(A)$

(5) $\forall t \in (0,\infty) \quad \forall x \in H: \frac{d}{dt} T(t)x = - AT(t)x = - T(t)Ax$

(6) $\exists \beta \in (-\infty,0) \quad : (-\infty,\beta) \subset \rho(A)$

(7) $\exists M \in (0,\infty) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \lambda \in (-\infty,\beta): \quad ||(A - \lambda I)^{-n}|| \leq M(\beta - \lambda)^{-n}$.

Der Operator A heißt Erzeuger der Halbgruppe $\{T(t) \mid t \in [0,\infty)\}$. Der Satz von Hille-Yosida-Phillips (vgl. Dunford/Schwartz [7], p. 624 ff.) besagt, daß die Eigenschaften (6) und (7) auch hinreichend dafür sind, daß ein Operator $A \in \mathcal{A}(H)$ Erzeuger einer starkstetigen Halbgruppe ist. Wegen der Bezüge zum Dunfordschen Funktionalkalkül (vgl. Dunford/Schwartz [7], p. 599 ff.) wird die so von A erzeugte Operatorhalbgruppe mit $\{e^{-tA} \mid t \in [0,\infty)\}$ bezeichnet.

Definition 3.4.1. Sei $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Eine Familie $\{T(t) \mid t \in S_\theta\} \subset L(H)$ heißt analytische Halbgruppe, wenn gilt:

(i) $T(s + t) = T(s)T(t) \qquad \forall s,t \in S_\theta$.

(ii) Für alle $x,y \in H$ ist die Abbildung
$S_\theta \ni t \to (T(t)x,y)_H \in \mathbb{C}$
analytisch.

(iii) $\forall \varepsilon \in (0,\theta)\ \exists C(\varepsilon) > 0\ \forall t \in S_\varepsilon : \|T(t)\| \leq C(\varepsilon)$.

(iv) $\forall \varepsilon \in (0,\theta)\ \forall x \in H \qquad : \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in S_\varepsilon}} T(t)x = x$.

Definition 3.4.2. Ein Operator $A \in \mathcal{A}(H)$ heißt Erzeuger einer analytischen Halbgruppe, wenn gilt:

(i) A erzeugt eine starkstetige Halbgruppe $\{T(t) \mid t \in [0,\infty)\}$ in H .

(ii) $\{T(t) \mid t \in (0,\infty)\}$ läßt sich zu einer analytischen Halbgruppe fortsetzen.

Mit diesen Definitionen gilt nun der

Satz 3.4.3. Ein Operator $A \in \mathcal{A}(H)$ ist genau dann Erzeuger einer analytischen Halbgruppe, wenn es ein $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ und ein $K > 0$ gibt mit

(i) $\sigma(A) \subset \overline{S_\theta}$.

(ii) $\|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\| \leq K \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta}$

Für den Beweis vgl. Friedman [10], Theorem 2.1., p. 101 ff; Reed/Simon [18], Theorem X.52, p. 248 ff.

Aus Korollar 3.26. und Satz 3.4.3. folgt nun unmittelbar das

Korollar 3.4.4. Sei A ein V-koerzitiver Operator in H und $\sigma_o < p\alpha^{-2} - c_o$. Dann erzeugt $A_F - \sigma_o I$ eine analytische Halbgruppe. □

Schließlich erwähnen wir das folgende sich aus Korollar 3.4.4. ergebende Resultat.

Korollar 3.4.5. Seien A ein V-koerzitiver Operator in H, $u_o \in H$, $T > 0$ und $f: [0,T] \to H$ Hölder-stetig, d.h. es gibt Konstanten $K \geq 0$ und $\gamma \in (0,1]$ mit

$$||f(s) - f(t)||_H \leq K|s - t|^\gamma \qquad \forall s,t \in [0,T] \ .$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^0([0,T],H) \cap C^1((0,T],H)$ des Anfangswertproblems

$$u'(t) + A_F u(t) = f(t) \qquad \forall t \in (0,T]$$

$$u(0) = u_o \ .$$

Zum Beweis vgl. Tanabe [22], Theorem 3.3.4., p. 70.

Bemerkung 3.4.6. Die Ergebnisse aus den Abschnitten 3.3. und 3.4. stehen in Hinblick auf unsere Untersuchung von Produktoperatoren in engem Zusammenhang mit einem Resultat von M. Reed und B. Simon in [16]. Dort wird bewiesen (Theorem 6), daß für stetig invertierbare Erzeuger A bzw. B analytischer Halbgruppen in Banachräumen X bzw. Y das Tensorprodukt $A \hat{\otimes} B$ in $X \hat{\otimes}_\alpha Y$ eine analytische Halbgruppe erzeugt, falls die Bedingungen $\sigma(A) \subset S_{\theta_1}$ und $\sigma(B) \subset S_{\theta_2}$ mit $\theta_1, \theta_2 > 0$ und $\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ erfüllt sind.

Dabei bedeutet $X \hat{\otimes}_\alpha Y$ das Tensorprodukt bezüglich einer uniformen "cross-" Norm $\alpha: X \otimes Y \to [0,\infty)$ (vgl. Schatten [19], p. 28 - 29; Ichinose [14], p. 128 - 129). Die Norm, die vom im Abschnitt 3.3. auf $H_1 \otimes H_2$ (H_1, H_2 Hilberträume) eingeführten Skalarprodukt induziert wird, ist eine uniforme "cross-" Norm in diesem Sinne.

Um den oben erwähnten Zusammenhang näher zu erläutern, betrachten wir zwei stetig invertierbare Operatoren $A \in A(H_1)$ und $B \in A(H_2)$. Wegen $0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$ ist auch $0 \in \rho(A \hat{\otimes} B)$, d.h. $A \hat{\otimes} B$ ist insbesondere surjektiv. Angenommen nun, $A \otimes B$ sei V-elliptisch (bezüglich eines Unterraumes V von $H_1 \hat{\otimes} H_2$), mithin ist also $(A \otimes B)_F$ injektiv. Aus Lemma 3.3.7. folgt dann $A \hat{\otimes} B = (A \otimes B)_F$. Korollar 3.4.4. zeigt schließlich, daß $A \hat{\otimes} B$ eine analytische Halbgruppe in $H_1 \hat{\otimes} H_2$ erzeugt.

4. Die Koerzitivität von Produkten elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung

4.1. Die Elliptizität von Produkten elliptischer Differentialoperatoren ohne Störglied

Die Aufgabe dieses Kapitels ist es, unter geeigneten Voraussetzungen an die Koeffizienten zweier linearer elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung (in verallgemeinerter Divergenzform) eine $\overset{o}{G}$ärdingsche Ungleichung für das Produkt derselben und damit die Koerzitivität des Produktes zu beweisen.

Zu diesem Zweck wollen wir in diesem Abschnitt unter gewissen Zusatzannahmen die Elliptizität des Produktes zweier elliptischer Differentialoperatoren ohne Störglied beweisen. Im Abschnitt 4.2. folgt dann für den allgemeinen Fall ein entsprechendes Resultat über die Koerzitivität des Produktoperators. Im Abschnitt 4.3. werden wir schließlich das verallgemeinerte homogene Dirichletproblem und das zugehörige Evolutionsproblem für Produktoperatoren behandeln, wobei wir auf die Ergebnisse aus den Abschnitten 3.2. und 3.4. zurückgreifen werden.

Seien $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ und $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ zwei beschränkte, offene und nichtleere Mengen. In G_r $(r = 1,2)$ betrachten wir den Differentialoperator

$$(1) \qquad P_r(x_r,D_{x_r}) = -\Sigma_{1\le i,j\le m_r} D_j(a_{ij}^{(r)}(x_r)D_i\cdot) + a^{(r)}(x_r)$$

mit

$$(2) \qquad a_{ij}^{(r)} \in C^1(\overline{G}_r) \text{ und } a^{(r)} \in C^1(\overline{G}_r)$$

für alle $i,j \in \{1,\dots,m_r\}$. Die Funktion $a^{(r)}$ bezeichnen wir als Störglied des Operators P_r und setzen

$$(3) \qquad P_r^H(x_r,D_{x_r}) := P_r(x_r,D_{x_r}) - a^{(r)}(x_r) = -\Sigma_{1\le i,j\le m_r} D_j(a_{ij}^{(r)}(x_r)D_i\cdot) \quad .$$

Weiter schreiben wir für $r = 1,2$

$$A_r = \max_{1\le i,j\le m_r} \sup_{G_r} |a_{ij}^{(r)}| \quad .$$

Die Größen A_1 und A_2 sind im weiteren Verlauf stets positiv, da wir nur an nichttrivialen Differentialoperatoren P_r $(r = 1,2)$ interessiert sind.

Sei nun G eine offene, nichtleere Teilmenge von $G_1 \times G_2$ (damit ist G offen und beschränkt in $\mathbb{R}^m$, $m = m_1 + m_2$). In G betrachten wir den Produktoperator

$$(4) \quad Q(x,D_x) = P_1(x_1,D_{x_1})\, P_2(x_2,D_{x_2}) \qquad (x = (x_1,x_2) \in G) \quad ,$$

der auf Funktionen aus $C_o^\infty(G)$ wirkt. Statt $Q(x,D_x)$, $P_r(x_r,D_{x_r})$ und $P_r^H(x_r,D_{x_r})$ werden wir im folgenden auch Q, P_r und P_r^H $(r = 1,2)$ schreiben. Setzen wir

$$(5) \quad \Gamma := \{\mu \in \mathbb{N}_o^{m_1} \mid |\mu| = 1\} \times \{\nu \in \mathbb{N}_o^{m_2} \mid |\nu| = 1\}$$

und

$$(6) \quad a_{\alpha\beta}(x) := a_{ij}^{(1)}(x_1)\, a_{k\ell}^{(2)}(x_2) \qquad \forall x = (x_1,x_2) \in G$$

für $\alpha = (\varepsilon_i,\varepsilon_k)$ und $\beta = (\varepsilon_j,\varepsilon_\ell)$ aus Γ (man vgl. Abschnitt 2.1.), so können wir $Q(x,D_x)$ auch in der Form

$$(7) \quad Q(x,D_x) = \Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma} D^\beta(a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha\cdot) + a^{(2)}(x_2)P_1^H(x_1,D_{x_1}) + a^{(1)}(x_1)P_2^H(x_2,D_{x_2}) + a^{(1)}(x_1)a^{(2)}(x_2)$$

darstellen.

Bemerkung 4.1.1. Fassen wir für $r = 1,2$ P_r als linearen, abschließbaren Operator in $L^2(G_r)$ mit Definitionsbereich $C_o^\infty(G_r)$ auf, so folgt wegen (4) (mit $G = G_1 \times G_2$)

$$P_1 \otimes P_2 = Q|_{C_o^\infty(G_1)\otimes C_o^\infty(G_2)} \quad .$$

Da die lokalkonvexe Topologie von $C_o^\infty(G_1 \times G_2)$ stärker ist als die von $P_1 \otimes P_2$ induzierte Graphentopologie, folgt sofort

$$C_o^\infty(G_1 \times G_2) \subset D(P_1 \hat{\otimes} P_2)$$

und damit für jede beliebige offene und nichtleere Teilmenge G von $G_1 \times G_2$:

(8) $Q = (P_1 \hat{\otimes} P_2)|C_o^\infty(G)$.

Als nächstes wollen wir untersuchen, welche Auswirkung die lokale Elliptizität der Symbole der Operatoren P_1 und P_2 auf das Symbol von Q hat.

Lemma 4.1.2. Angenommen, es gibt Punkte $x_{1,o} \in G_1$, $x_{2,o} \in G_2$ und zwei positive Konstanten c_1, c_2 mit

$$(9)\quad \begin{cases} \operatorname{Re} \Sigma_{1\le i,j\le m_1} a_{ij}^{(1)}(x_{1,o})\xi_i\xi_j \ge c_1|\xi|^2 & \forall \xi \in \mathbb{R}^{m_1} \\ \operatorname{Re} \Sigma_{1\le k,\ell\le m_2} a_{k\ell}^{(2)}(x_{2,o})\eta_k\eta_\ell \ge c_2|\eta|^2 & \forall \eta \in \mathbb{R}^{m_2} \end{cases} ,$$

und es gilt

$$(10)\quad \exists r \in \{1,2\}\ \forall i,j \in \{1,\dots,m_r\}: a_{ij}^{(r)}(x_{r,o}) \in \mathbb{R} .$$

Dann gilt für $x_o := (x_{1,o}, x_{2,o}) \in G_1 \times G_2$

$$\operatorname{Re} \Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma} a_{\alpha\beta}(x_o)\zeta^\alpha\zeta^\beta \ge c_1c_2 \Sigma_{\alpha\in\Gamma}\zeta^{2\alpha} \qquad \forall \zeta \in \mathbb{R}^m .$$

Beweis. Wir haben für $\zeta = (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} = \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma} a_{\alpha\beta}(x_o)\zeta^\alpha\zeta^\beta \\ &= \operatorname{Re} \Sigma_{1\le i,j\le m_1} \Sigma_{1\le k,\ell\le m_2} a_{ij}^{(1)}(x_{1,o}) a_{k\ell}^{(2)}(x_{2,o})\xi_i\xi_j\eta_k\eta_\ell \\ &= \operatorname{Re}\Big(\Sigma_{1\le i,j\le m_1} a_{ij}^{(1)}(x_{1,o})\xi_i\xi_j \Sigma_{1\le k,\ell\le m_2} a_{k\ell}^{(2)}(x_{2,o})\eta_k\eta_\ell\Big) \\ &\underset{(10)}{=} \operatorname{Re} \Sigma_{1\le i,j\le m_1} a_{ij}^{(1)}(x_{1,o})\xi_i\xi_j \operatorname{Re} \Sigma_{1\le i,j\le m_2} a_{k\ell}^{(2)}(x_{2,o})\eta_k\eta_\ell \\ &\underset{(9)}{\ge} c_1c_2|\xi|^2|\eta|^2 = c_1c_2 \Sigma_{\substack{1\le i\le m_1\\ 1\le k\le m_2}} \xi_i^2\eta_k^2 = c_1c_2 \Sigma_{\alpha\in\Gamma}\zeta^{2\alpha} . \end{aligned}$$

□

Wir kommen nun zum angekündigten Hauptresultat dieses Abschnittes.

Satz 4.1.3. Seien P_1 und P_2 die durch (1) und (2) in G_1 bzw. G_2 definierten Differentialoperatoren mit $a^{(1)} \not\equiv 0$, $a^{(2)} \not\equiv 0$. Des weiteren gebe es Punkte $x_{1,o} \in G_1$ und $x_{2,o} \in G_2$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Elliptizitätsbedingung: Es gibt Konstanten $c_1, c_2 > 0$ mit

$$\text{Re } \Sigma_{1\le i,j\le m_1} a_{ij}^{(1)}(x_{1,o})\xi_i\xi_j \ge c_1|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^{m_1}$$

$$\text{Re } \Sigma_{1\le k,\ell\le m_2} a_{k\ell}^{(2)}(x_{2,o})\eta_k\eta_\ell \ge c_2|\eta|^2 \qquad \forall \eta \in \mathbb{R}^{m_2} \quad .$$

(ii) Einer der beiden Operatoren P_r $(r = 1,2)$ hat in $x_{r,o}$ ein reelles Symbol, d.h. die Bedingung (10) in Lemma 4.1.2. ist erfüllt.

(iii) Kopplungsbedingung: Es gibt Konstanten $\kappa \in [0,1)$, $d_1, d_2 \ge 0$ mit

$$(11) \quad \begin{cases} |a_{ij}^{(1)}(x_1) - a_{ij}^{(1)}(x_{1,o})| \le \dfrac{d_1}{A_2} & \forall x_1 \in G_1 \quad \forall i,j \in \{1,\dots,m_1\} \\ |a_{k\ell}^{(2)}(x_2) - a_{k\ell}^{(2)}(x_{2,o})| \le \dfrac{d_2}{A_1} & \forall x_2 \in G_2 \quad \forall k,\ell \in \{1,\dots,m_2\} \end{cases}$$

und

$$(12) \qquad d_1 + d_2 \le \kappa \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} \quad .$$

Sei $G \subset G_1 \times G_2$ offen (und nichtleer). Dann ist der durch (4) in G definierte Produktoperator $Q: C_o^\infty(G) \to L^2(G)$ $H_o^\Gamma(G)$-elliptisch mit

$$(13) \quad \text{Re } \beta_Q(u,u) \ge (1-\kappa)c_1c_2||u||_{\Gamma,G}^2 \qquad \forall u \in C_o^\infty(G) \quad .$$

(Dabei bedeutet Γ die durch (5) gegebene Menge von Multiindizes.)

Beweis. Wir führen den Beweis o.B.d.A. für den Fall $G = G_1 \times G_2$. Wegen (7) hat die von Q auf $C_o^\infty(G)$ induzierte Sesquilinearform β_Q die Darstellung

$$(14) \quad \beta_Q(u,v) = \Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma}(a_{\alpha\beta}D^\alpha u, D^\beta v)_{o,G} \qquad \forall u \in C_o^\infty(G) \quad .$$

Da Γ m_1m_2 Elemente besitzt, gilt nun für alle $u,v \in C_o^\infty(G)$

(15) $\Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma}||D^{\alpha}u||_{o,G}\,||D^{\beta}v||_{o,G} \le m_1m_2||u||_{\Gamma,G}\,||v||_{\Gamma,G}$,

also ist

$$|\beta_Q(u,v)| \le A_1A_2m_1m_2||u||_{\Gamma,G}\,||v||_{\Gamma,G} \qquad \forall u,v \in C_o^{\infty}(G) \quad .$$

Zum Nachweis der Gårdingschen Ungleichung (13) beachten wir zunächst, daß wegen Lemma 4.1.2. aus (i) und (ii) die Ungleichung

(16) $\mathrm{Re}\,\Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma}a_{\alpha\beta}(x_o)\zeta^{\alpha}\zeta^{\beta} \ge c_1c_2\,\Sigma_{\alpha\in\Gamma}\zeta^{2\alpha} \qquad \forall\zeta\in\mathbb{R}^m$

mit $x_o := (x_{1,o},x_{2,o})$ folgt. Als nächstes betrachten wir die Kopplungsbedingung (iii). Seien $x = (x_1,x_2) \in G$ sowie $i,j \in \{1,\dots,m_1\}$ und $k,\ell \in \{1,\dots,m_2\}$. Setzen wir $\alpha := (\varepsilon_i,\varepsilon_k)$ und $\beta := (\varepsilon_j,\varepsilon_\ell)$, so folgt

$$\begin{aligned}
&|a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x_o)| \\
&= |a^{(1)}_{ij}(x_1)a^{(2)}_{k\ell}(x_2) - a^{(1)}_{ij}(x_{1,o})a^{(2)}_{k\ell}(x_{2,o})| \\
&= |a^{(1)}_{ij}(x_1)a^{(2)}_{k\ell}(x_2) - a^{(1)}_{ij}(x_{1,o})a^{(2)}_{k\ell}(x_2) + a^{(1)}_{ij}(x_{1,o})a^{(2)}_{k\ell}(x_2) - \\
&\qquad\qquad - a^{(1)}_{ij}(x_{1,o})a^{(2)}_{k\ell}(x_{2,o})| \\
&\le |a^{(2)}_{k\ell}(x_2)|\,|a^{(1)}_{ij}(x_1) - a^{(1)}_{ij}(x_{1,o})| + |a^{(1)}_{ij}(x_{1,o})|\,|a^{(2)}_{k\ell}(x_2) - a^{(2)}_{k\ell}(x_{2,o})| \\
&\le A_2\frac{d_1}{A_2} + A_1\frac{d_2}{A_1} = d_1 + d_2 \le \kappa\frac{c_1c_2}{m_1m_2} \quad ,
\end{aligned}$$

wobei wir in den beiden letzten Abschätzungen die Ungleichungen (11) und (12) ausgenutzt haben. Wir erhalten damit für alle $x \in G$ und $\alpha,\beta \in \Gamma$

(17) $|a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x_o)| \le \kappa\frac{c_1c_2}{m_1m_2}$.

Wir schreiben nun $\beta_Q(u,u)$ für $u \in C_o^{\infty}(G)$ in der Form

$$\beta_Q(u,u) = \Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma}a_{\alpha\beta}(x_o)\,(D^{\alpha}u,D^{\beta}u)_{o,G} + \Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma}\int_G(a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x_o))D^{\alpha}u(x)\overline{D^{\beta}u(x)}\,dx$$

und erhalten

$$(18)\quad \operatorname{Re} \beta_Q(u,u) \geq \operatorname{Re} \Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma} a_{\alpha\beta}(x_o)\,(D^\alpha u, D^\beta u)_{o,G}$$

$$- \Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma} \int_G |a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x_o)|\,|D^\alpha u(x)|\,|D^\beta u(x)|\,dx$$

$$\geq_{(17)} \operatorname{Re} \Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma} a_{\alpha\beta}(x_o)\,(D^\alpha u, D^\beta u)_{o,G} - \kappa \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} \Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma} \int_G |D^\alpha u(x)|\,|D^\beta u($$

$$\geq \operatorname{Re} \Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma} a_{\alpha\beta}(x_o)\,(D^\alpha u, D^\beta u)_{o,G} - \kappa \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} \Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma} \|D^\alpha u\|_{o,G} \|D^\beta u\|_{}$$

$$\geq_{(15)} \operatorname{Re} \Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma} a_{\alpha\beta}(x_o)\,(D^\alpha u, D^\beta u)_{o,G} - \kappa\, c_1 c_2 \,|u|\,|^2_{\Gamma,G} \quad .$$

Bezeichnen wir mit $\hat{u}$ die Fourier-Transformierte von u , d.h.

$$\hat{u}(\zeta) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_G e^{-ix\zeta} u(x)\,dx \qquad \forall \zeta \in \mathbb{R}^m$$

und beachten wir, daß für alle $\alpha \in \mathbb{N}_o^m$

$$\widehat{D^\alpha u}(\zeta) = i^{|\alpha|} \zeta^\alpha \hat{u}(\zeta) \qquad \forall \zeta \in \mathbb{R}^m$$

gilt, so folgt aus dem Satz von Plancherel (vgl. Reed/Simon [18], p. 10)

$$(19)\quad (D^\alpha u, D^\beta u)_{o,G} = (\widehat{D^\alpha u}, \widehat{D^\beta u})_{o,G} = \int_{\mathbb{R}^m} \zeta^{\alpha+\beta} |\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta$$

für alle $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_o^m$. Aus (16) und (19) folgt nun unter nochmaliger Ausnutzung des Satzes von Plancherel

$$\operatorname{Re} \Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma} a_{\alpha\beta}(x_o)\,(D^\alpha u, D^\beta u)_{o,G}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{Re} \Sigma_{\alpha,\beta\in\Gamma} a_{\alpha\beta}(x_o) \zeta^{\alpha+\beta} |\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta$$

$$\geq c_1 c_2 \int_{\mathbb{R}^m} \Sigma_{\alpha\in\Gamma} \zeta^{2\alpha} |\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta = c_1 c_2 \,\Sigma_{\alpha\in\Gamma} \|\widehat{D^\alpha u}\|^2_{o,\mathbb{R}^m} = c_1 c_2 \,|u|\,|^2_{\Gamma,G} \quad .$$

Wegen (18) ergibt sich hieraus

$$\operatorname{Re} \beta_Q(u,u) \geq (1 - \kappa) c_1 c_2 \,|u|\,|^2_{\Gamma,G}$$

d.h. (13). Da $C_o^\infty(G)$ in $H_o^\Gamma(G)$ dicht liegt, ist die Behauptung vollständig bewiesen.

□

Bemerkung 4.1.4. Im Fall von Operatoren mit konstanten Koeffizienten ist die Bedingung (iii) trivialerweise erfüllt.

Die Bedingung (iii) ist so stark, daß man in Kombination mit der Elliptizitätsbedingung (i) auf die gleichmäßige Elliptizität der Operatoren P_1 und P_2 schließen kann. Wir zeigen die Behauptung o.B.d.A. für den Operator P_1 . Wegen $m_2 \geq 1$ und $A_2 \geq c_2$ erhalten wir aus (12)

$$\frac{d_1}{A_2} \leq \kappa \frac{c_1}{m_1}$$

und damit für jedes $x_1 \in G_1$

$$\text{(20)} \quad \operatorname{Re} \Sigma_{1\leq i,j\leq m_1} a_{ij}^{(1)}(x_1)\xi_i\xi_j \geq \operatorname{Re} \Sigma_{1\leq i,j\leq m_1} a_{ij}^{(1)}(x_{1,o})\xi_i\xi_j -$$

$$- \Sigma_{1\leq i,j\leq m_1} |a_{ij}^{(1)}(x_1) - a_{ij}^{(1)}(x_{1,o})|\,|\xi_i||\xi_j|$$

$$\geq c_1|\xi|^2 - m_1 \frac{d_1}{A_2}|\xi|^2 \geq c'|\xi|^2$$

mit $c' = (1 - \kappa)c_1 > 0$, d.h. P_1 ist gleichmäßig elliptisch in G_1 . Insbesondere ist $P_1: C_o^\infty(G_1) \to L^2(G_1)$ $H_o^1(G_1)$-elliptisch, denn aus (20) folgt sofort

$$\operatorname{Re}(P_1u,u)_{o,G_1} \geq c'||u||_{1,G}^2 \qquad \forall u \in C_o^\infty(G_1) \quad .$$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit dem folgenden

Beispiel 4.1.5. Sei $G_1 = G_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$. In G_1 betrachten wir den Operator

$$P_1 = - \Sigma_{1\leq i,j\leq 2} D_j(a_{ij}^{(1)} D_i \cdot)$$

mit

$$a_{ij}^{(1)}(x_1) = \delta_{ij}(1 - \frac{1}{20}|x_1|^2) \qquad \forall x_1 \in G_1 \quad \forall i,j \in \{1,2\} \quad ,$$

und in G_2 den Operator

$$P_2 = - \Sigma_{1\leq k,\ell\leq 2} D_\ell(a_{k\ell}^{(2)} D_k \cdot)$$

mit

$$a_{k\ell}^{(2)}(x_2) = \delta_{k\ell}\, e^{i\frac{\pi}{6}} \cos \frac{\pi}{6}|x_2|^2 \qquad \forall x_2 \in G_2 \quad \forall k,\ell \in \{1,2\} \quad .$$

Wir zeigen jetzt, daß die Voraussetzungen von Satz 4.1.3. für die Operatoren P_1 und P_2 mit $x_{1,o} := 0$ und $x_{2,o} := 0$ erfüllt sind. Dazu beachten wir, daß

$$A_1 = A_2 = 1$$

ist, und daß die Elliptizitätsbedingung (i) offensichtlich mit

$$c_1 = 1 \quad , \quad c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

erfüllt ist. Da P_1 nur reelle Koeffizienten besitzt, ist auch (ii) gültig. Zum Nachweis der Kopplungsbedingung (iii) setzen wir

$$d_1 := \frac{1}{20} \quad , \quad d_2 := 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \kappa := \frac{9}{10}$$

und erhalten

$$|a_{ij}^{(1)}(x_1) - a_{ij}^{(1)}(x_{1,o})| \leq \frac{1}{20}|x_1|^2 \leq \frac{1}{20} = \frac{d_1}{A_2} \qquad \forall x_1 \in G_1 \quad \forall i,j \in \{1,2\}$$

$$|a_{k\ell}^{(2)}(x_2) - a_{k\ell}^{(2)}(x_{2,o})| \leq |1 - \cos\tfrac{\pi}{6}|x_2|^2| \leq 1 - \cos\tfrac{\pi}{6} = \frac{d_2}{A_1}$$

$$\forall x_2 \in G_2 \quad \forall k,\ell \in \{1,2\}$$

sowie (wegen $m_1 = m_2 = 2$)

$$d_1 + d_2 = \frac{1}{20} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{9}{10}\frac{\sqrt{3}}{8} = \kappa \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} \quad .$$

Gemäß Satz 4.1.3. ist dann $Q = P_1 P_2 : C_o^\infty(G) \to L^2(G)$ $(G \subset G_1 \times G_2$ offen) $H_o^\Gamma(G)$-elliptisch mit $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{N}_o^2 \mid |\mu| = 1\} \times \{\nu \in \mathbb{N}_o^2 \mid |\nu| = 1\}$.

4.2. Produkte elliptischer Operatoren mit Störglied

In diesem Abschnitt wollen wir nun den allgemeinen Fall behandeln, in dem die in den Operatoren P_1 und P_2 auftretenden Störglieder $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ nicht notwendigerweise verschwinden müssen. Wir machen dazu die folgenden Generalvoraussetzungen:

Es seien $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ und $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ offene und beschränkte Mengen, $G \subset G_1 \times G_2$ sei offen und in $G_r (r = 1,2)$ sei der durch (4.1.1.) und (4.1.2.) auf $C_o^\infty(G_r)$ definierte Differentialoperator P_r gegeben. Des weiteren betrachten wir auf $C_o^\infty(G)$ die Produktoperatoren

$$Q := P_1 P_2 : C_o^\infty(G) \to L^2(G)$$

und

$$Q_o := P_1^H P_2^H : C_o^\infty(G) \to L^2(G) \quad .$$

Um die Formulierung des nachfolgenden Satzes so einfach wie möglich zu halten, werden wir voraussetzen, daß Q_o $H_o^\Gamma(G)$-elliptisch mit

$$\Gamma = \{\mu \in \mathbb{N}_o^{m_1} \mid |\mu| = 1\} \times \{\nu \in \mathbb{N}_o^{m_2} \mid |\nu| = 1\}$$

ist. Das ist z.B. dann gegeben, wenn die Operatoren P_1^H und P_2^H die Voraussetzungen des Satzes 4.1.3. erfüllen. Weiter führen wir die folgenden Teilmengen von $\mathbb{N}_o^m$ $(m = m_1 + m_2)$ ein:

$$\Gamma_1 = \{\mu \in \mathbb{N}_o^{m_1} \mid |\mu| = 1\} \times \{0\} \ , \ \Gamma_2 = \{0\} \times \{\nu \in \mathbb{N}_o^{m_2} \mid |\nu| = 1\}$$

und setzen für $r = 1,2$ (vgl. Abschnitt 2.3.)

$$\alpha_r := d_{\Gamma_r}(G)$$

sowie

$$\alpha := d_\Gamma(G) \quad .$$

Wegen der Poincaré-Ungleichung (Proposition 2.3.3.) folgt dann für alle $u \in C_o^\infty(G)$

$$(1) \quad \begin{cases} ||u||_{\Gamma_1} \le \alpha_2 ||u||_\Gamma \\ ||u||_{\Gamma_2} \le \alpha_1 ||u||_\Gamma \\ ||u||_o \le \alpha\, ||u||_\Gamma \end{cases} .$$

Wir bemerken schließlich, daß wegen (4.1.2.) für $r = 1,2$

$$(2) \quad C_r := \sup_{u,v \in C_o^\infty(G) \setminus \{0\}} \frac{|(P_r^H u, v)_o|}{||u||_{\Gamma_r} ||v||_{\Gamma_r}} < \infty$$

ist, und setzen für $r = 1,2$

$$(3) \quad \gamma_r := ||a^{(r)}||_{L^\infty(G_r)} \quad .$$

Satz 4.2.1. Der Operator $Q_o: C_o^\infty(G) \to L^2(G)$ sei $H_o^\Gamma(G)$-elliptisch mit

$$\operatorname{Re} \beta_{Q_o}(u,u) \geq p_o ||u||_\Gamma^2 \qquad \forall u \in C_o^\infty(G)$$

($p_o > 0$) und es gelte

$$(4) \quad p := p_o - (C_1\gamma_2\alpha_2^2 + C_2\gamma_1\alpha_1^2) > 0 \quad .$$

Dann ist $Q = P_1P_2: C_o^\infty(G) \to L^2(G)$ $H_o^\Gamma(G)$-koerzitiv mit

$$(5) \quad \operatorname{Re} \beta_Q(u,u) \geq p||u||_\Gamma^2 - \gamma_1\gamma_2||u||_o^2 \qquad \forall u \in C_o^\infty(G) \quad .$$

Insbesondere ist Q $H_o^\Gamma(G)$-elliptisch, falls gilt:

$$(6) \quad p > \gamma_1\gamma_2\alpha^2 \quad .$$

Beweis. Wegen der Darstellung (4.1.7.) erhalten wir für $u,v \in C_o^\infty(G)$

$$\beta_Q(u,v) = \beta_{Q_o}(u,v) + (P_1^H u, \overline{a^{(2)}v})_o + (P_2^H u, \overline{a^{(1)}v})_o + ((a^{(1)} \otimes a^{(2)})u,v)_o \quad .$$

Nun ist wegen (1) und (2)

$$(7) \quad |(P_1^H u, \overline{a^{(2)}v})_o| \leq C_1||u||_{\Gamma_1}||\overline{a^{(2)}v}||_{\Gamma_1} \leq C_1\gamma_2\alpha_2^2||u||_\Gamma||v||_\Gamma \quad ,$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß wegen (4.1.2.) für alle $v \in C_o^\infty(G)$ $a^{(2)}v \in H_o^\Gamma(G)$ ($\subset H_o^{\Gamma_1}(G)$) ist. Analog folgt (für alle $u,v \in C_o^\infty(G)$)

$$(8) \quad |(P_2^H u, \overline{a^{(1)}v})_o| \leq C_2\gamma_1\alpha_1^2||u||_\Gamma||v||_\Gamma$$

sowie

$$(9) \quad |((a^{(1)} \otimes a^{(2)})u,v)_o| \leq \gamma_1\gamma_2||u||_o||v||_o \leq \gamma_1\gamma_2\alpha^2||u||_\Gamma||v||_\Gamma \quad .$$

Da Q_o $H_o^\Gamma(G)$-elliptisch ist, folgt aus (7), (8) und (9)

$$|\beta_Q(u,v)| \leq C||u||_\Gamma||v||_\Gamma \qquad \forall u,v \in C_o^\infty(G)$$

für eine gewisse Konstante $C > o$. Weiter haben wir wegen (7), (8) und (9) für alle $u \in C_o^\infty(G)$

$$\text{Re } \beta_Q(u,u) \geq \text{Re } \beta_{Q_o}(u,u) - C_1\gamma_2\alpha_2^2 ||u||_\Gamma^2 - C_2\gamma_1\alpha_1^2 || \; ||_\Gamma^2 - \gamma_1\gamma_2 ||u||_o^2 \quad ,$$

woraus (5) und wegen (4) die $H_o^\Gamma(G)$-Koerzitivität von Q folgt. Da die Operatornorm der Einbettung $E: H_o^\Gamma(G) \to L^2(G)$ nach Korollar 2.3.5. der Abschätzung $||E|| \leq \alpha$ genügt, impliziert (6) nach dem Beweis von Proposition 3.2.3. die $H_o^\Gamma(G)$-Elliptizität von Q . □

Beispiel 4.2.2. In $G = (0,\frac{\pi}{2}) \times (0,\frac{\pi}{2})$ betrachten wir den Operator

$$(10) \quad Q = (-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1)(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 1) = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 1$$

(vgl. Scott [20], p. 99). Hier wie auch in Beispiel 4.2.3. unten bezeichnen wir die Variablen mit x und y . Der Operator $Q_o = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$ ist $H_o^\Gamma(G)$-elliptisch mit $\Gamma = \{(1,1)\} (\subset \mathbb{N}_o^2)$ und

$$\text{Re}(Q_o u,u)_o \geq ||u||_\Gamma^2 \qquad \forall u \in C_o^\infty(G) \quad ,$$

d.h. $p_o = 1$. Weiter haben wir $\Gamma_1 = \{(1,0)\}$, $\Gamma_2 = \{(0,1)\}$ und damit

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

sowie

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1 \; , \; C_1 = C_2 = 1 \quad .$$

Nach Satz 4.2.1. ist damit Q $H_o^\Gamma(G)$-koerzitiv mit

$$\text{Re}(Qu,u)_o \geq \frac{1}{2}||u||_\Gamma^2 - ||u||_o^2 \qquad \forall u \in C_o^\infty(G) \quad .$$

Daß die in Satz 4.2.1. auftretende Abhängigkeit der Koerzitivität des Produktoperators von der Größe des Gebietes (durch das Auftreten der Größen $\alpha_r = d_{\Gamma_r}(G)$, r = 1,2) wesentlich ist, zeigt das folgende Gegenbeispiel:

Wir betrachten den durch (10) gegebenen Operator Q im Gebiet

$$G' = (0,\pi) \times (0,2\pi)$$

und behaupten:

Q ist nicht $H_o^\Gamma(G')$-koerzitiv.

Angenommen nämlich, es gäbe Konstanten $p > 0$ und $c_o \in \mathbb{R}$ mit

$$(11)\quad \mathrm{Re}(Qu,u)_o \geq p||u||_\Gamma^2 - c_o||u||_o^2 \qquad \forall u \in C_o^\infty(G') \quad .$$

Wegen $||u||_\Gamma = ||u_{xy}||_o$ für $u \in C_o^\infty(G')$ ist (11) äquivalent zu

$$(11')\quad ||u_y||_o^2 - ||u_x||_o^2 \geq (p-1)||u_{xy}||_o^2 - (c_o - 1)||u||_o^2 \qquad \forall u \in C_o^\infty(G') \quad .$$

Dabei haben wir die durch partielle Integration folgenden Identitäten ($u \in C_o^\infty(G')$)

$$(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, u)_o = ||u_{xy}||^2 \ , \ (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u)_o = - ||u_x||_o^2 \ , \ (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u)_o = - ||u_y||_o^2$$

benutzt. Schätzen wir nun $||u_y||_o$ nach der Poincaré-Ungleichung (Proposition 2.3.3.) gegen $||u_{xy}||_o$ ab, so folgt

$$- ||u_x||_o^2 \geq (p-2)||u_{xy}||_o^2 - (c_o - 1)||u||_o^2$$

bzw.

$$(12)\quad ||u_x||_o^2 \leq (2-p)||u_{xy}||_o^2 + (c_o - 1)||u||_o^2 \qquad \forall u \in C_o^\infty(G') \quad .$$

Proposition 2.3.6., angewandt auf (12) (mit $\delta = 2 - p$) , impliziert nun

$$2 - p \geq 4 \quad ,$$

d.h. $p \leq -2$, im Widerspruch zur Annahme. Folglich ist Q nicht $H_o^\Gamma(G')$-koerzitiv.

Die im Satz 4.2.1. auftretende Bedingung (4) ist keine notwendige Bedingung. Das zeigt das:

Beispiel 4.2.3. Im Gebiet $G = (0,\pi) \times (0,\pi)$ sei der Produktoperator

$$Q = (-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a^{(1)})(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + a^{(2)})$$

mit

$$a^{(1)} = 1 + i \ , \ a^{(2)} = -\frac{1}{2} + i$$

gegeben. Wie im Beispiel 4.2.2. ist $Q_o = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$ $H_o^\Gamma(G)$-elliptisch ($\Gamma = \{(1,1)\}$) mit $p_o = 1$, und $C_1 = C_2 = 1$. Wegen $\Gamma_1 = \{(1,0)\}$, $\Gamma_2 = \{(0,1)$

folgt weiter

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

und es ist

$$\gamma_1 = |a^{(1)}| = \sqrt{2} \ , \ \gamma_2 = |a^{(2)}| = \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad .$$

Also gilt

$$p_o - (C_1\gamma_2\alpha_2^2 + C_2\gamma_1\alpha_1^2) = 1 - (\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}) < 0 \quad ,$$

d.h. (4) ist nicht erfüllt. Nichtsdestotrotz folgt aus

$$(Qu,u)_o = ||u_{xy}||_o^2 + a^{(2)}||u_x||_o^2 + a^{(1)}||u_y||_o^2 + a^{(1)}a^{(2)}||u||_o^2 \quad \forall u \in C_o^\infty(G)$$

(vgl. Beispiel 4.2.2.) und der Poincaré-Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(Qu,u)_o &= ||u_{xy}||_o^2 - \tfrac{1}{2}||u_x||_o^2 + ||u_y||_o^2 - \tfrac{3}{2}||u||_o^2 \\ &\geq ||u_{xy}||_o^2 - \tfrac{1}{2}||u_{xy}||_o^2 + ||u||_o^2 - \tfrac{3}{2}||u||_o^2 \\ &= \tfrac{1}{2}||u||_\Gamma^2 - \tfrac{1}{2}||u||_o^2 \qquad \forall u \in C_o^\infty(G) \quad , \end{aligned}$$

d.h. $Q: C_o^\infty(G) \to L^2(G)$ ist $H_o^\Gamma(G)$-koerzitiv.

4.3. Das verallgemeinerte homogene Dirichletproblem und das Evolutionsproblem für koerzitive Produktoperatoren

In diesem das Kapitel 4 abschließenden Abschnitt wollen wir die Fredholmsche Alternative für das verallgemeinerte homogene Dirichletproblem für koerzitive Produktoperatoren beweisen und das zugehörige Evolutionsproblem behandeln.

Zu diesem Zweck übernehmen wir die Generalvoraussetzungen und Bezeichnungsweisen aus den Abschnitten 4.1. und 4.2.

Wie in der Einleitung schon erwähnt wurde, interpretieren wir das verallgemeinerte homogene Dirichletproblem für $H_o^\Gamma(G)$-koerzitive Produktoperatoren $Q: C_o^\infty(G) \to L^2(G)$ als Problem der Lösbarkeit der Gleichung

$$Q_F u = f \quad (f \in L^2(G))$$

in $H_o^\Gamma(G)$. Dies wird gerechtfertigt durch den folgenden Spursatz:

Satz 4.3.1. Seien $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ offen und beschränkt und für r = 1,2 sei der Rand ∂G_r von G_r eine C^1-Mannigfaltigkeit der Dimension $m_r - 1$. Dann gilt für $u \in H_o^{\Gamma}(G_1 \times G_2) \cap C^1(\overline{G_1 \times G_2})$:

$$D^{\beta}u|_{G_1 \times \partial G_2} = 0 \qquad \forall \beta \in \Gamma_1 \cup \{0\}$$

$$D^{\beta}u|_{\partial G_1 \times G_2} = 0 \qquad \forall \beta \in \Gamma_2 \cup \{0\} \quad .$$

Für den Beweis siehe Doppel/Jacob [5], Theorem 4, p. 380 - 381.

Bevor wir das Dirichletproblem für Produktoperatoren behandeln, wollen wir ein Hilfsergebnis über koerzitive Operatoren in Hilberträumen herleiten. In diesem Zusammenhang sei an die im Abschnitt 3.2. eingeführten Bezeichnungen erinnert.

Lemma 4.3.2. Sei A ein V-koerzitiver Operator in H und die Einbettung E: V → H sei kompakt. Dann ist für jedes $\lambda \in \rho(A_F)$ $(A_F - \lambda I)^{-1}$ kompakt und damit

$$T_\lambda = I + \lambda(A_F - \lambda I)^{-1}$$

Fredholm-Operator mit Index 0 (d.h. ind T_λ = dim Ker T_λ - codim $R(T_\lambda)$ = 0)

(1) $\quad \text{Ker } A_F = \text{Ker } T_\lambda \ , \ R(A_F) = R(T_\lambda) = (\text{Ker } T_\lambda^*)^{\perp}$

und es gilt

(2) $\quad \dim \text{Ker } A_F = \dim R(A_F)^{\perp} < \infty \quad .$

Beweis. Wegen $c_o \in \rho(A_F)$ und

$$\text{Re}((A_F - c_o I)u,u)_H \geq p||u||_V^2 \qquad \forall u \in D(A_F)$$

folgen für die Inverse $R := (A_F - c_o I)^{-1}$ die Abschätzungen

$$\left.\begin{aligned} &\text{Re}(u,Ru)_H \geq p||Ru||_V^2 \\ &||Ru||_V^2 \leq \frac{1}{p}||u||_H||Ru||_H \leq \frac{\alpha}{p}||u||_H||Ru||_V \end{aligned}\right\} \forall u \in H$$

und damit $R \in L(H,V)$. Wegen der Darstellung $R = E \circ R$ und der Kompaktheit von E ergibt sich hieraus die Kompaktheit von R . Da die kompakten Operatoren in H ein Ideal in L(H) bilden, folgt die Kompaktheit von $(A_F - \lambda I)^{-1}$ für beliebiges $\lambda \in \rho(A_F)$ aus der Resolventengleichung

$$(A_F - \lambda I)^{-1} = R + (\lambda - c_o)(A_F - \lambda I)^{-1}R \quad .$$

Damit ist T_λ Fredholm-Operator vom Index 0 (vgl. Hirzebruch/Scharlau, [12], Korollar 25.3, p. 109), woraus

$$(3) \qquad \dim \operatorname{Ker} T_\lambda = \dim \operatorname{Ker} T_\lambda^* < \infty$$

und

$$R(T_\lambda) = (\operatorname{Ker} T_\lambda^*)^\perp$$

folgt (vgl. Hirzebruch/Scharlau, Lemma 25.6., p. 110). Nun ist (1) für $\lambda = 0$ trivialerweise richtig. Für $\lambda \neq 0$ folgt (1) aus der für $u \in D(A_F)$ und $f \in H$ geltenden Äquivalenz

$$A_F u = f \iff T_\lambda(f - \lambda u) = f \quad .$$

Schließlich ergibt sich (2) aus (1) und (3). □

Satz 4.3.3. Der durch (4.1.4.) gegebene Produktoperator $Q: C_o^\infty(G) \to L^2(G)$ möge den Voraussetzungen des Satzes 4.2.1. genügen. Dann ist $\operatorname{Ker} Q_F$ endlich-dimensional und für die Gleichung

$$(4) \qquad Q_F u = f \qquad (f \in L^2(G))$$

gilt die Fredholmsche Alternative:

(i) Die Gleichung (4) ist für jedes $f \in L^2(G)$ eindeutig lösbar ($\dim \operatorname{Ker} Q_F = 0$) oder

(ii) es gibt n linear unabhängige Elemente $v_1, \ldots, v_n \in L^2(G)$ (mit $n = \dim \operatorname{Ker} Q_F \geq 1$)

derart, daß (4) genau dann lösbar ist, wenn f den Bedingungen

$$(f, v_i)_{o,G} = 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

genügt. In diesem Fall ist die Lösung bis auf einen Summanden aus $\operatorname{Ker} Q_F$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Nach Satz 4.2.1. ist Q $H_o^\Gamma(G)$-koerzitiv. Da die Einbettung $E: H_o^\Gamma(G) \to L^2(G)$ gemäß Korollar 3.3.9. kompakt ist, sind die Voraussetzungen von Lemma 4.3.2. erfüllt. Also ist $\operatorname{Ker} Q_F$ endlich-dimensional und die Fredholmsche Alternative folgt nun aus (2), wobei

wir im Falle $n = \dim \operatorname{Ker} Q_F \geq 1$ $\{v_1,\ldots,v_n\}$ als Basis des n-dimensionalen Raumes $R(Q_F)^{\perp}$ wählen. □

Bemerkung 4.3.4. Die Kompaktheit der Einbettung $E: H_o^{\Gamma}(G) \to L^2(G)$ hat für den Fall, daß die Koeffizienten von P_1 und P_2 den Bedingungen

$$a_{ij}^{(r)} = \overline{a_{ji}^{(r)}} \ , \ \operatorname{Im} a^{(r)} = 0 \quad (r = 1,2 \ ; \ i,j \in \{1,\ldots,m_r\})$$

genügen und $Q = P_1P_2: C_o^{\infty}(G) \to L^2(G)$ somit symmetrisch ist, wichtige Konsequenzen für das Spektrum von Q_F . Ist nämlich Q $H_o^{\Gamma}(G)$-elliptisch, so ist Q_F nach Korollar 3.2.4. selbstadjungiert. Nach Lemma 4.3.2. ist dann $Q_F^{-1}: L^2(G) \to L^2(G)$ kompakt und selbstadjungiert und der Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren (vgl. Reed/Simon [17], Theorem VI. 16, p. 203) zeigt, daß das Spektrum $\sigma(Q_F^{-1})$ aus einer monoton fallenden Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\mu_1 = ||Q_F^{-1}||$ und $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ besteht und daß eine Orthonormalbasis $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(G)$ von Eigenelementen von Q_F^{-1} mit

$$Q_F^{-1}u_n = \mu_n u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

existiert. Folglich ist

$$\sigma(Q_F) = \{\mu_n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Eigenbasis von $L^2(G)$ zum Operator Q_F .

Abschließend betrachten wir für einen $H_o^{\Gamma}(G)$-koerzitiven Produktoperator

$$Q = P_1P_2: C_o^{\infty}(G) \to L^2(G)$$

das Evolutionsproblem

$$\begin{aligned} &u'(t) + Q_F u(t) = f(t) && \forall t \in (0,T] \\ &u(0) = u_o \end{aligned} \tag{5}$$

mit $T > 0$, $f: [0,T] \to L^2(G)$ (gleichmäßig) Hölder-stetig und $u_o \in L^2(G)$. Es gilt der

Satz 4.3.5. Der Produktoperator $Q: C_0^\infty(G) \to L^2(G)$ möge die Voraussetzungen des Satzes 4.2.1. erfüllen. Dann ist das Problem (5) wohldefiniert und es existiert eine eindeutig bestimmte Lösung

$$u \in C^0([0,T],L^2(G)) \cap C^1((0,T],L^2(G))$$

von (5).

Beweis. Da Q nach Satz 4.2.1. $H_0^\Gamma(G)$-koerzitiv ist, folgt die Behauptung aus Korollar 3.4.5. □

5. Regularitätsaussagen für elliptische Produktoperatoren

5.1. Vorbemerkungen über gleichmäßig elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung

Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ eine offene beschränkte Menge, deren Rand ∂G eine $(m-1)$-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit ist. In G betrachten wir den linearen gleichmäßig elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung $P: C_o^\infty(G) \to L^2(G)$

$$Pu = -\Sigma_{1\le i,j\le m} D_j(a_{ij}D_i u) + \Sigma_{1\le i\le m} a_i D_i u + au \qquad \forall u \in C_o^\infty(G)$$

mit $a_{ij} \in C^1(\overline{G})$, $a_i \in C^1(\overline{G})$ und $a \in L^\infty(G)$ für $i,j \in \{1,\dots,m\}$. Dabei bedeutet die vorausgesetzte gleichmäßige Elliptizität wie üblich das Bestehen der Ungleichung

$$\mathrm{Re}\ \Sigma_{1\le i,j\le m} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge c|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^m \quad \forall x \in G$$

mit einer gewissen Konstanten $c > 0$. Damit ist dann P $H_o^1(G)$-koerzitiv (vgl. Showalter [21], Theorem 5.A., p. 65). Ist nun $u \in H^2(G) \cap H_o^1(G)$, so ist

$$f := -\Sigma_{1\le i,j\le m} a_{ij} D_j D_i u - \Sigma_{1\le i,j\le m} D_j a_{ij} D_i u + \Sigma_{1\le i\le m} a_i D_i u + au$$

ein wohldefiniertes Element von $L^2(G)$ mit

$$\beta_P(u,v) = (f,v)_{o,G} \qquad \forall v \in C_o^\infty(G)$$

und daher $u \in D(P_F)$. Folglich ist

$$(1) \qquad H^2(G) \cap H_o^1(G) \subset D(P_F) \quad .$$

Andererseits folgt aus der vorausgesetzten Regularität des Randes ∂G und der Koeffizienten von P , daß für jedes $f \in L^2(G)$ und jede Funktion $u \in H_o^1(G)$ mit $P_F u = f$, d.h. mit

$$\beta_P(u,v) = (f,v)_{o,G} \qquad \forall v \in H_o^1(G)$$

sogar

$$u \in H^2(G)$$

gilt. Für den Beweis siehe Showalter [21], p. 68 - 73, insbesondere Theorem 6.B., sowie Friedman [10], Theorem 17.2, p. 67. Insgesamt

bedeutet diese Regularitätsaussage

$$D(P_F) \subset H^2(G) \quad ,$$

was wegen $D(P_F) \subset H_o^1(G)$ und (1)

$$(2) \qquad D(P_F) = H^2(G) \cap H_o^1(G)$$

impliziert. Dieses Regularitätsergebnis für das homogene Dirichletproblem für den Operator P ist damit gleichbedeutend mit der Bestimmung des Definitionsbereiches $D(P_F)$ seiner Friedrichs-Fortsetzung.

Ist der Rand ∂G sogar eine C^∞-Mannigfaltigkeit und gilt für die Koeffizienten von P

$$a_{ij} \in C^\infty(\bar{G}) \ , \ a_i \in C^\infty(\bar{G}) \ , \ a \in C^\infty(\bar{G})$$

$(i,j \in \{1,\ldots,m\})$, so zeigt die Regularitätstheorie für elliptische Operatoren (vgl. Friedman [10], Theorem 17.3, p. 68), daß

$$(3) \qquad P_F^{-1}(C^\infty(\bar{G})) \subset C^\infty(\bar{G})$$

ist.

Für die (nicht hypoelliptischen) koerzitiven Produktoperatoren ist eine direkte Bestimmung der Definitionsbereiche ihrer Friedrichs-Fortsetzungen nicht zu erwarten. In dem im nächsten Abschnitt behandelten Spezialfall $H_o^\Gamma(G)$-elliptischer Produkte elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung lassen sich jedoch determinierende Bereiche für die zugehörigen Friedrichs-Fortsetzungen angeben.

5.2. Die Friedrichs-Fortsetzungen elliptischer Produktoperatoren

Wir beginnen mit einigen Hilfsergebnissen.

Lemma 5.2.1. Es seien V_1, V_2, H_1, H_2 Hilberträume und A V_1-koerzitiv in H_1 sowie B V_2-koerzitiv in H_2 . Ist $A \otimes B$ $V_1 \hat{\otimes} V_2$-koerzitiver Operator in $H_1 \hat{\otimes} H_2$, so sind auch $A_F \otimes B_F$ und $A_F \hat{\otimes} B_F$ $V_1 \hat{\otimes} V_2$-koerzitiv mit

(1) $(A_F \otimes B_F)_F = (A_F \hat{\otimes} B_F)_F = (A \otimes B)_F$.

Beweis. Wir zeigen die Beziehung

(2) $A_F \hat{\otimes} B_F \subset (A \otimes B)_F$,

woraus dann wegen

$$A \otimes B \subset A_F \otimes B_F \subset A_F \hat{\otimes} B_F$$

die Behauptung folgt. Sei dazu $u \in D(A_F) \otimes D(B_F)$, und o.B.d.A. sei u einfacher Tensor, d.h. es ist $u = x \otimes y$ mit $x \in D(A_F)$ und $y \in D(B_F)$. Für alle $v \in V_1$ und $w \in V_2$ gilt dann

$$((A_F \otimes B_F)u, v \otimes w)_{H_1 \hat{\otimes} H_2} = (A_F x, v)_{H_1} (B_F y, w)_{H_2}$$

$$= \beta_A(x,v)\beta_B(y,w) = \beta_{A \otimes B}(u, v \otimes w) \quad ,$$

woraus

$$((A_F \otimes B_F)u, z)_{H_1 \hat{\otimes} H_2} = \beta_{A \otimes B}(u,z) \qquad \forall z \in V_1 \otimes V_2$$

folgt. Da $V_1 \otimes V_2$ in $V_1 \hat{\otimes} V_2$ dicht liegt, ist $u \in D((A \otimes B)_F)$ und $(A_F \otimes B_F)u = (A \otimes B)_F u$, und wir erhalten

(3) $A_F \otimes B_F \subset (A \otimes B)_F$.

Da $(A \otimes B)_F$ abgeschlossen und $A_F \hat{\otimes} B_F = \overline{A_F \otimes B_F}$ ist, folgt aus (3) die Beziehung (2) und damit die Behauptung. □

Lemma 5.2.2. Es seien $G \subset \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt und $\Gamma_o \subset \mathbb{N}_o^m$ endlich und nichtleer, und der Differentialoperator $A: C_o^\infty(G) \to L^2(G)$ mit

$$Au = \Sigma_{\alpha \in \Gamma_o} c_\alpha D^\alpha u \qquad \forall u \in C_o^\infty(G)$$

($c_\alpha \in C^k(\bar{G})$ für alle $\alpha \in \Gamma_o$; $k = \max\{|\alpha| \mid \alpha \in \Gamma_o\}$) sei V-koerzitiv bezüglich eines stetig und dicht in $L^2(G)$ eingebetteten Hilbertraumes V . Dann ist

$$H^{\Gamma_o}(G) \cap V \subset D(A_F) \quad .$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß $C_o^\infty(G) \subset D(A^*)$ ist. Sei nun $u \in H^{\Gamma_o}(G) \cap V$. Dann existiert zu jedem $\alpha \in \Gamma_o$ ein $u_\alpha \in L^2(G)$ mit

$$(u,D^\alpha v)_{o,G} = (u_\alpha,v)_{o,G} \qquad \forall v \in C_o^k(G) \quad .$$

Insbesondere gilt also für alle $\alpha \in \Gamma_o$

$$(u,D^\alpha(\overline{c}_\alpha v))_{o,G} = (u_\alpha,\overline{c}_\alpha v)_{o,G} = (c_\alpha u_\alpha,v)_{o,G} \qquad \forall v \in C_o^\infty(G)$$

und damit

$$(u,A^*v)_{o,G} = (f,v)_{o,G} \qquad \forall v \in C_o^\infty(G)$$

mit

$$f := \Sigma_{\alpha\in\Gamma_o}(-1)^{|\alpha|}c_\alpha u_\alpha \in L^2(G) \quad .$$

Wegen $u \in V$ existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_o^\infty(G)$ mit $||u_n - u||_V \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Da damit auch $||u_n - u||_{o,G} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gilt, haben wir

$$\begin{aligned}(f,v)_{o,G} &= \lim_{n\to\infty}(u_n,A^*v)_{o,G} = \lim_{n\to\infty}(Au_n,v)_{o,G} \\ &= \lim_{n\to\infty}\beta_A(u_n,v) = \beta_A(u,v) \qquad \forall v \in C_o^\infty(G) \quad .\end{aligned}$$

Da $C_o^\infty(G)$ in V dicht liegt, folgt hieraus $u \in D(A_F)$. □

Das nächste Lemma zeigt, daß stetig invertierbare Operatoren natürliche determinierende Bereiche (vgl. Abschnitt 3.1.) besitzen.

Lemma 5.2.3. Es seien H ein Hilbertraum, Y ein dichter Unterraum von H und $T \in A(H)$ mit $0 \in \rho(T)$. Dann ist $T^{-1}(Y)$ determinierender Bereich für T.

Beweis. Wir zeigen, daß $T^{-1}(Y)$ bezüglich der Graphennorm $||\cdot||_T$ in D(T) dicht liegt. Seien dazu $x \in D(T)$ und $\varepsilon > 0$. Wir suchen ein $x_\varepsilon \in T^{-1}(Y)$ mit $||x - x_\varepsilon||_T \le \varepsilon$. Wegen $\overline{Y} = H$ existiert nun ein $y_\varepsilon \in Y$ mit

$$||Tx - y_\varepsilon||_H \le \frac{\varepsilon}{||T^{-1}|| + 1} \quad .$$

Für $x_\varepsilon := T^{-1}(y_\varepsilon)$ aus $T^{-1}(Y)$ gilt dann

$$||x - x_\varepsilon||_T \le ||x - x_\varepsilon||_H + ||Tx - Tx_\varepsilon||_H \le (||T^{-1}|| + 1)||Tx - y_\varepsilon||_H \le \varepsilon \ ,$$

was zu zeigen war. □

Wir kommen nun zur Bestimmung determinierender Bereiche für elliptische Produktoperatoren (man vgl. in diesem Zusammenhang Doppel/Jacob [5], p. 382).

Satz 5.2.4. Für $r = 1,2$ sei $G_r \subset \mathbb{R}^{m_r}$ offen und beschränkt und ∂G_r eine $(m_r - 1)$-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit. Weiter sei für $r = 1,2$ $P_r: C_o^\infty(G_r) \to L^2(G_r)$ ein $H_o^1(G_r)$-elliptischer Differentialoperator der Form

$$P_r u = - \Sigma_{1 \le i,j \le m_r} D_j(a_{ij}^{(r)} D_i u) + a^{(r)} u \qquad \forall u \in C_o^\infty(G_r)$$

mit $a_{ij}^{(r)} \in C^1(\overline{G_r})$, $a^{(r)} \in C^1(\overline{G_r})$ für $i,j \in \{1,\dots,m_r\}$. Ist dann der Produktoperator $(G = G_1 \times G_2)$

$$Q = P_1 P_2: C_o^\infty(G) \to L^2(G)$$

$H_o^\Gamma(G)$-elliptisch mit $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{N}_o^{m_1} \mid |\mu| = 1\} \times \{\nu \in \mathbb{N}_o^{m_2} \mid |\nu| = 1\}$, so ist

$$(H^2(G_1) \cap H_o^1(G_1)) \otimes (H^2(G_2) \cap H_o^1(G_2))$$

determinierender Bereich für Q_F . Sind darüber hinaus ∂G_1 und ∂G_2 C^∞-Mannigfaltigkeiten und gilt für $r = 1,2$ und $i,j \in \{1,\dots,m_r\}$

$$a_{ij}^{(r)} \in C^\infty(\overline{G_r}) \ , \ a^{(r)} \in C^\infty(\overline{G_r}) \ ,$$

so sind

$$(C^\infty(\overline{G_1}) \cap H_o^1(G_1)) \otimes (C^\infty(\overline{G_2}) \cap H_o^1(G_2))$$

und

$$C^\infty(\overline{G}) \cap H_o^\Gamma(G)$$

determinierende Bereiche für Q_F .

Beweis. Ist $P_{r,F}$ die Friedrichs-Fortsetzung von P_r , so ist nach Bemerkung 4.1.1.

$$(4) \qquad P_1 \otimes P_2 \subset Q \subset P_{1,F} \hat{\otimes} P_{2,F} \ .$$

Da Q und damit $P_1 \otimes P_2$ $H_o^\Gamma(G)$-koerzitiv ist (man beachte, daß $C_o^\infty(G_1) \otimes C_o^\infty(G_2)$ in $H_o^\Gamma(G)$ dicht liegt), folgt aus Lemma 5.2.1. die $H_o^\Gamma(G)$-Koerzivität von $P_{1,F} \hat{\otimes} P_{2,F}$ mit

$$(P_1 \otimes P_2)_F = (P_{1,F} \otimes P_{2,F})_F = (P_{1,F} \hat{\otimes} P_{2,F})_F \quad .$$

Wegen (4) folgt hieraus

$$Q_F = (P_{1,F} \otimes P_{2,F})_F \quad .$$

Da nach Voraussetzung $0 \in \rho(Q_F)$, $0 \in \rho(P_{r,F})$ $(r = 1,2)$ ist, können wir Lemma 3.3.7. anwenden und erhalten

$$Q_F = P_{1,F} \hat{\otimes} P_{2,F}$$

sowie (wiederum wegen $0 \in \rho(Q_F)$, $0 \in \rho(P_{r,F})$, $r = 1,2$)

$$(5) \qquad Q_F^{-1} = P_{1,F}^{-1} \hat{\otimes} P_{2,F}^{-1} \quad .$$

Wählen wir nun $Y = L^2(G_1) \otimes L^2(G_2)$ als dichten Unterraum von $L^2(G)$, so folgt aus (5), (5.1.2.) und Lemma 5.2.3., daß

$$Q_F^{-1}(Y) = P_{1,F}^{-1}(L^2(G_1)) \otimes P_{2,F}^{-1}(L^2(G_2)) = D(P_{1,F}) \otimes D(P_{2,F})$$

$$= (H^2(G_1) \cap H_o^1(G_1)) \otimes (H^2(G_2) \cap H_o^1(G_2))$$

determinierender Bereich für Q_F ist, und damit der erste Teil der Behauptung. Zum Beweis des zweiten Teils setzen wir voraus, daß ∂G_1 und ∂G_2 C^∞-Mannigfaltigkeiten und daß die Koeffizienten von P_r $(r = 1,2)$ in $C^\infty(\overline{G_r})$ liegen. Gemäß (5.1.3.) erhalten wir dann für $r = 1,2$

$$P_{r,F}^{-1}(C^\infty(\overline{G_r})) = C^\infty(\overline{G_r}) \cap H_o^1(G_r) \quad .$$

Mit $Y = C^\infty(\overline{G_1}) \otimes C^\infty(\overline{G_2})$ folgt hieraus und aus dem Lemma 5.2.3., daß

$$Q_F^{-1}(Y) = P_{1,F}^{-1}(C^\infty(\overline{G_1})) \otimes P_{2,F}^{-1}(C^\infty(\overline{G_2}))$$

$$= (C^\infty(\overline{G_1}) \cap H_o^1(G_1)) \otimes (C^\infty(\overline{G_2}) \cap H_o^1(G_2))$$

determinierender Bereich für Q_F ist. Nach Lemma 5.2.2. ist nun weiter

$$C^\infty(\overline{G}) \cap H_o^\Gamma(G) \subset D(Q_F) \quad ,$$

also ist wegen der Inklusion

$$(C^\infty(\overline{G_1}) \cap H_o^1(G_1)) \otimes (C^\infty(\overline{G_2}) \cap H_o^1(G_2)) \subset C^\infty(\overline{G}) \cap H_o^\Gamma(G)$$

der Satz vollständig bewiesen. □

Bemerkung 5.2.5. Besitzen die Operatoren $P_{1,F}$ und $P_{2,F}$ Greensche Funktionen g_1 und g_2, d.h. ist für $r = 1,2$ $P_{r,F}^{-1}$ Integraloperator mit Kern g_r, und erfüllen g_1 und g_2 gewisse Zusatzbedingungen, so kann man schließen, daß Q_F die durch

$$(6) \qquad g(x,y) = g_1(x_1,y_1)g_2(x_2,y_2)$$

für alle $x = (x_1,x_2)$ und $y = (y_1,y_2)$ aus $G_1 \times G_2$ definierte Greensche Funktion $g: G \times G \to \mathbb{C}$ besitzt. Mit anderen Worten, es ist

$$(7) \qquad Q_F^{-1}u = \int_G g(\cdot,y)u(y)dy \qquad \forall u \in L^2(G) \quad .$$

Wir zeigen die Behauptung für den Fall, daß $P_{1,F}^{-1}$ und $P_{2,F}^{-1}$ Hilbert-Schmidt-Operatoren sind, d.h. daß $g_r \in L^2(G_r \times G_r)$ für $r = 1,2$ ist (vgl. hierzu Agmon [1], Lemma 2.1., p. 630f.). Aus (6) folgt nämlich sofort $g \in L^2(G \times G)$. Der von g erzeugte Hilbert-Schmidt-Operator stimmt wegen (5) und (6) auf dem in $L^2(G)$ dichten Teilraum $L^2(G_1) \otimes L^2(G_2)$ mit Q_F^{-1} überein. Da beide Operatoren stetig sind, folgt hieraus (7).

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir den Satz 5.2.4. anhand eines Beispieles erläutern.

Beispiel 5.2.6. Die offenen und beschränkten Mengen $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ und $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ mögen den Voraussetzungen des Satzes 5.2.4. genügen. Es sei $G = G_1 \times G_2$ und für $r = 1,2$ $\Delta_r = \Sigma_{1 \le i \le m_r} D_i^2$ der Laplace-Operator in G_r. Der durch $P_r := -\Delta_r: C_o^\infty(G_r) \to L^2(G_r)$ gegebene Differentialoperator ist $H_o^1(G_r)$-elliptisch, denn es ist

$$\mathrm{Re}(P_r u,u)_{o,G_r} = (P_r u,u)_{o,G_r} = ||u||_{1,G_r}^2 \qquad \forall u \in C_o^\infty(G_r) \quad .$$

Weiter folgt aus Satz 4.1.3., daß $Q = P_1P_2$: $C_o^\infty(G) \to L^2(G)$ $H_o^\Gamma(G)$-elliptisch mit $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{N}_o^{m_1} \mid |\mu| = 1\} \times \{\nu \in \mathbb{N}_o^{m_2} \mid |\nu| = 1\}$ ist. Nun läßt sich Q auch in der Form

$$Qu = \Sigma_{\alpha\in\Gamma_o} D^\alpha u \qquad \forall u \in C_o^\infty(G)$$

mit $\Gamma_o = 2\Gamma = \{2\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ schreiben. Nach Lemma 5.2.2. ist dann

$$(8) \qquad H^{2\Gamma}(G) \cap H_o^\Gamma(G) \subset D(Q_F)$$

und wegen

$$(H^2(G_1) \cap H_o^1(G_1)) \otimes (H^2(G_2) \cap H_o^1(G_2)) \subset H^{2\Gamma}(G) \cap H_o^\Gamma(G)$$

(vgl. Beispiel 3.3.6.) folgt aus Satz 5.2.4., daß $H^{2\Gamma}(G) \cap H_o^\Gamma(G)$ determinierender Bereich für Q_F ist.

Für $m_1 = m_2 = 1$ folgt hieraus sogar

$$(9) \qquad D(Q_F) = H^{2\Gamma}(G) \cap H_o^\Gamma(G) \quad .$$

(Man beachte, daß die Bemerkungen in Abschnitt 5.1. auch für den Fall $m = 1$, d.h. für den Fall gewöhnlicher Differentialoperatoren Gültigkeit haben.)
Zum Beweis von (9) sei $u \in D(Q_F)$. Da $H^{2\Gamma}(G) \cap H_o^\Gamma(G)$ determinierender Bereich für Q_F ist, existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^{2\Gamma}(G) \cap H_o^\Gamma(G)$ mit

$$||u_n - u||_{Q_F} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad .$$

Nun ist aber (mit $|v|_{2\Gamma} := (v,v)_{2\Gamma}^{1/2}$, $v \in H^{2\Gamma}(G)$)

$$|v|_{2\Gamma} = (||v||_o^2 + ||\frac{\partial^4 v}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}||_o^2)^{1/2} = ||v||_{Q_F} \qquad \forall v \in H^{2\Gamma}(G) \cap H_o^\Gamma(G) \quad ,$$

also ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $H^{2\Gamma}(G)$ und demnach konvergent gegen ein $u' \in H^{2\Gamma}(G)$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Limites (in $L^2(G)$) erhalten wir $u = u'$, d.h. $u \in H^{2\Gamma}(G)$. Es folgt $D(Q_F) \subset H^{2\Gamma}(G)$, was zusammen mit (8) die Beziehung (9) ergibt.

Literatur

[1] Agmon, S.: On Kernels, Eigenvalues, and Eigenfunctions of Operators Related to Elliptic Problems. Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), 627 - 663.

[2] Agmon, S.: Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. Van Nostrand, Princeton, New York, 1965.

[3] Dieudonné, J.: Grundzüge der modernen Analysis. Band 3. Vieweg, Braunschweig, 1976.

[4] Dieudonné, J.: Grundzüge der modernen Analysis. Band 4. Vieweg, Braunschweig, 1976.

[5] Doppel, K./ N. Jacob: A non-hypoelliptic Dirichlet problem from stochastics. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math. 8 (1983), 375 - 389.

[6] Doppel, K./ N. Jacob: On an evolution equation for a non-hypoelliptic linear partial differential operator from stochastics. Z. Anal. Anwendungen 3 (1984), 425 - 433.

[7] Dunford, N./ J.T. Schwartz: Linear Operators, Part I: General Theory. Interscience Publishers, New York, 1964.

[8] Dym, H./ H.P. McKean: Fourier Series and Integrals. Academic Press, New York, London, 1972.

[9] Dynkin, E.B.: Harmonic functions associated with several Markov processes. Adv. in Appl. Math. 2 (1981), 260 - 283.

[10] Friedman, A.: Partial Differential Equations. Holt, Rinehart And Winston, New York, 1969.

[11] Hardy, G.H./ J.E. Littlewood/ G. Pólya: Inequalities. 2nd ed. Cambridge University Press, London, New York, 1952.

[12] Hirzebruch, F./ W. Scharlau: Einführung in die Funktionalanalysis. Bibliographisches Institut. Mannheim, Wien, Zürich, 1971.

[13] Hörmander, L.: Linear partial differential operators. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963.

[14] Ichinose, T.: On the spectra of tensor products of linear operators on Banach spaces. J. Reine. Angew. Math. 244 (1970), 119 - 153.

[15] Jacob, N.: Bemerkungen über verallgemeinerte homogene lineare Dirichletprobleme. Dissertation Freie Universität Berlin, 1980.

[15] Jacob, N.: On generalized Dirichlet Problems. Math. Scand. 55 (1984), 245 - 252.

[16] Reed, M./B. Simon: Tensor Products of Closed Operators on Banach Spaces. J. Functional Anal. 13 (1973), 107 - 124.

[17] Reed, M./B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis. Academic Press, New York, London, 1972.

[18] Reed, M./B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness. Academic Press, New York, London, 1975.

[19] Schatten, R.: A Theory of Cross Spaces. Ann. Math. Study 26, Princeton University Press, Princeton, 1950.

[20] Scott, A.C.: The application of Bäcklund transforms to physical problems. In: R.M. Miura (Ed.): Bäcklund transformations. Lecture Notes in Mathematics 515. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976, 80 - 105.

[21] Showalter, R.E.: Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations. Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1977.

[22] Tanabe, H.: Equations of Evolution. Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1979.

[23] Treves, F.: Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Academic Press, New York, London, 1967.

[24] Weidmann, J.: Lineare Operatoren in Hilberträumen. B.G. Teubner, Stuttgart, 1976.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das verallgemeinerte homogene Dirichletproblem für Produkte linearer elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung in verallgemeinerter Divergenzform untersucht. Als Vorbereitung dazu stellen wir in Kapitel 2 einige Ergebnisse über Funktionenräume zusammen und behandeln in Kapitel 3 koerzitive Operatoren und analytische Halbgruppen sowie Tensorprodukte von linearen Operatoren in Hilberträumen. In Kapitel 4 zeigen wir unter gewissen Voraussetzungen die Koerzitivität von Produkten elliptischer Differentialoperatoren, und benutzen diese Koerzitivitätsaussage, um die Fredholmsche Alternative für das verallgemeinerte Dirichletproblem und die eindeutige Lösbarkeit des dazugehörigen Evolutionsproblems zu beweisen. Schließlich gewinnen wir in Kapitel 5 Regularitätsaussagen für den Fall, daß der zugrundeliegende Produktoperator (im verallgemeinerten Sinn) elliptisch ist.

Lebenslauf

Ich, Bernd Schomburg, wurde am 13. November 1959 als Sohn des Maschinenschlossers Wilfried Schomburg und der Krankenschwester Hildegard Schomburg, geborene Kugler, in Bremen geboren. Dort besuchte ich von 1966 bis 1969 die Grundschule an der Osterholzer Heerstraße und danach das Gymnasium an der Parsevalstraße, wo ich am 3. Mai 1977 die allgemeine Hochschulreife erlangte.

Im Wintersemester 1977/78 nahm ich das Studium der Mathematik an der Freien Universität Berlin auf. Als Nebenfach wählte ich Physik. Meine Diplomvorprüfung legte ich am 28. November 1979 ab, der Abschluß der Diplomprüfung erfolgte am 30. Juli 1982.

Mein Studium wurde seit dem Sommersemester 1978 durch ein Stipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes gefördert. Des weiteren war ich vom Wintersemester 1979/80 bis zum Sommersemester 1982 als studentischer Tutor am Fachbereich Mathematik der Freien Universität Berlin beschäftigt.

Mein Promotionsvorhaben wurde von Dezember 1982 bis März 1984 durch ein Doktorandenstipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes unterstützt. Seit dem Sommersemester 1984 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematik III der Freien Universität Berlin tätig.

Berlin, im Juni 1985

Bernd Schomburg